المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات ٢-٣

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثانية

الفصل الدراسي الثالث

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٤ - ٢٠٢٢

يوزع مجاناً ولا يباع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٢–٣ التعليم الثانوي نظام المسارات – السنة الثانية – الفصل
الدراسي الثالث./ وزارة التعليم.– الرياض ، ١٤٤٣هـ
١٢٥ ص ؛ ٢٧,٥ x ٢١سم
ردمك : ٣ – ٠٩٨ – ٥١١ – ٦٠٣ – ٩٧٨

١– الرياضيات –كتب دراسية أ. العنوان
ديوي ٣٧٢,٧ ١٤٤٣ /٨٣٥٨

رقم الإيداع : ١٤٤٣/٨٣٥٨
ردمك : ٣ - ٠٩٨ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الفهرس

الفصل 7 الاحتمالات

الفهرس

الفصل 8 حساب المثلَّثات

إليك عزيزي الطالب

ستركز في دراستك لهذا الكتاب على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- الاحتمالات وتطبيقاتها.
- حساب المثلثات وتطبيقاتها.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته من أفكار في **المطويات** .
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها.
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 7

الاحتمالات
Probabilities

فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، والتباديل والتوافيق، واحتمالات الحوادث البسيطة والمركبة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثِّل فضاء العيّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

لماذا؟

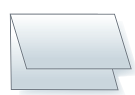
ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

المطويات منظم أفكار

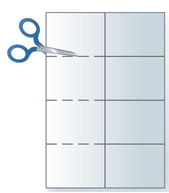
الاحتمالات: اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات؛ مستعملاً ورقة A3.

1 **اطو الورقة** طوليًّا.

2 **اطو الورقة** نصفين مرتين.



3 **قصّ كل خط طي أفقيًّا** في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.



4 **اكتب العناوين** كما في الشكل.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل السابع

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-7)

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$

2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$

3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$

4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$

5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$

6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7) **كرة قدم:** لدى فريق كرة قدم 54 لترًا (L) من الماء البارد في قوارير سعة كلٍّ منها 500 مللترًا (ml). كم قارورة لديهم؟

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-7 إلى 3-7)

8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1.

9) أن يكون العدد الظاهر فرديًّا.

10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2.

11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6).

12) **احتمالات:** ألقي مجسم ذو 4 وجوه متطابقة، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 1-4. (تستعمل مع الدرس 1-7)

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	|||	3
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |	6
4	||||	4

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟

14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟

15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

$\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot 1}{9\cdot 2}$ اضرب البسط في البسط والمقام في المقام

$=\frac{6}{18}$

$=\frac{1}{3}$ بسّط

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من }5)=\frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$، ويساوي 67% تقريبًا.

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5.

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	||||	4
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |||	8
4	||||	4
5	||	2
6	𝍸	5

$$P(5)=\frac{\text{عدد مرات ظهور }5}{\text{عدد جميع النواتج}}=\frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{2}{30}$ ويساوي 6.7% تقريبًا

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

7-1

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

فيما سبق:

درستُ حساب الاحتمال التجريبي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل القوائم، والجداول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العيّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:

فضاء العيّنة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أيُّ الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة: لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة .
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتجٍ ممكنٍ من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L   T , L

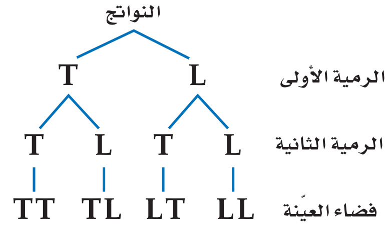
L , T   T , T

الجدول

دوّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري



إرشادات للدراسة

المكعب المرقّم

هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6.

✓ تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمَّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

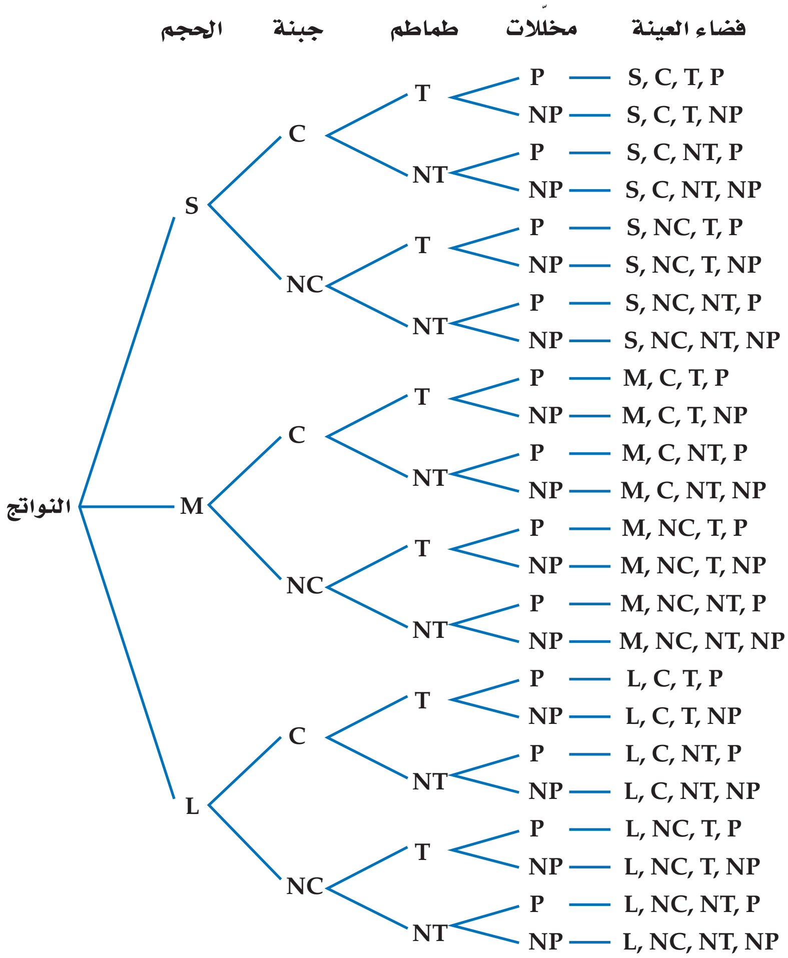
مثال 2 من واقع الحياة — الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر لحم كما هو مبين في قائمة الشطائر المجاورة. مثِّل فضاء العيِّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
- اختيار الجبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC).
- اختيار الطماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT).
- اختيار المخلّلات (مع مخلّلات P، بدون مخلّلات NP).

أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تنبيه!

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2 ، يختصر الحرفان: و / أو مرحلتين للاختيار هما:

- مع طماطم أو بدون طماطم.

-مع مخللات أو بدون مخللات. ويقابل هذا أربعة اختيارات ممكنة هي: مع الطماطم فقط، أو مع المخللات فقط، أو مع الطماطم والمخللات أو بدون طماطم ولا مخللات.

قراءة الرياضيات

رموز الرسم الشجري

اخترْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في الرسم الشجري. ففي المثال 2، تدل C على اختيار الجبنة، وNC تدل على عدم اختيار الجبنة، أمّا NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

تحقق من فهمك

2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي(S) أو أسود(B) أو أحمر(R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و / أو غطاء للجهاز(W). مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

مبدأ العد الأساسي: قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب
يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعدّ.

مفهوم أساسي — مبدأ العدّ الأساسي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيِّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

$\vdots$

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال مبدأ العدّ الأساسي

الربط بالحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوب من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

استعمل مبدأ العد الأساسي.

القماش		اللون		الأكمام		القبّة		الفتحة الأمامية		الأزرار		
5	×	6	×	3	×	3	×	2	×	2	=	1080

إذن لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.

تحقق من فهمك

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

3B) رمي مكعب مرقّم أربع مرات.

3C) **أحذية:** اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 45 , 44 , 43 , 42 , 41 , 40 , 39 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

نموذج الإجابة

1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
7. Ⓣ Ⓕ
8. Ⓣ Ⓕ
9. Ⓣ Ⓕ
10. Ⓣ Ⓕ

تأكد

مثال 1 للسؤالين 1 ، 2 مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة ممّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

1) عندما يسدّد اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب سدّد ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

مثال 2 **3) ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثّل فضاء العيّنة في هذا الموقف بالرسم الشجري.

مثال 3 **4) مطاعم:** عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكلَّ صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كلِّ صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

تدرب وحل المسائل

مثال 1 للأسئلة 5–7 مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة ممّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيٍّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلّثات؛ أحدهما يشتمل على مثلّث منفرج الزاوية (O) أو مثلّث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلّث متطابق الضلعين (E) أو مثلّث مختلف الأضلاع (N).

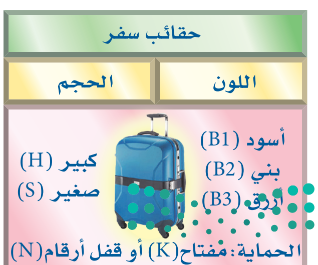
ألوان مائية (A)

ألوان زيتية (O)

8) رسم: ينفّذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مثال 2 للسؤالين 9 ، 10 مثّل فضاء العيّنة مستعملًا الرسم الشجري في كلٍّ ممّا يأتي:

9) سيارات: يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاحة (N) و/ أو سقف متحرك (R).



10) حقائب: يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًّا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح و/ أو قفل أرقام.

مثال 3

11) **نشاطات:** تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الرياضي وَ 4 طلاب للنشاط العلمي وَ 5 طلاب للتوعية الإسلامية وَ طالبان للإذاعة المدرسية، على ألا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

12) **فن:** أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال الجدول والرسم الشجري.

13) **إفطار:** الإعلان المجاور، يوضِّح قائمة وجبة الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟

14) **دراجات:** اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9 .

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضِّح إجابتك.

15) **تمثيلات متعددة:** تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولًا دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقِ مكعبًا مرقّما، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2 .

a) **هندسيًّا:** استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة.

b) **منطقيًّا:** ارسم شكل ڤن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة.

c) **تحليليًّا:** ما عدد النواتج الممكنة؟

d) **لفظيًّا:** هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

16) **تحدٍّ:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برِّر إجابتك.

17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرِّر إجابتك.

18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n. اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضِّح إجابتك.

19) **اكتب:** وضِّح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

20) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

A 4 **C** 8

B 6 **D** 9

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

A 12 **C** 60

B 35 **D** عدد لانهائي

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

23) $3 , 12 , 48 , 192 , ...$ (مهارة سابقة)

24) $-10 , -6 , -2 , 2 , ...$ (مهارة سابقة)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين (مهارة سابقة)

25) $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{10}{7}$

26) $1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$

أوجد الناتج في كلٍّ ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

27) $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$

28) $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$

29) $\frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فيما سبق:

درست استعمال مبدأ العد الأساسي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال .

المفردات:

المضروب
factorial

التباديل
permutations

التباديل الدائرية
circular permutation

التوافيق
combinations

لماذا؟

وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًّا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي يوجد $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.

يمكن كتابة العبارة $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$ ،

مثال 1 الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة : نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌّ منهم قميصًا مرقّمًا من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$.

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $(20-2)! = 18!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$P(\text{نواف } 1 \text{ و ماجد } 2) = \frac{18!}{20!}$$

عدد نواتج الحادثة

عدد النواتج الممكنة

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{18!}}}{20 \cdot 19 \cdot \underset{1}{\cancel{18!}}}$$

جد مفكوك $20!$ واقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{1}{380}$$

بسّط

إرشادات للدراسة

العشوائية

عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًّا تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

تحقق من فهمك

1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائيًّا ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360 .

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز $_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$$_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$ حيث

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2 الاحتمال والتباديل

إرشادات للدراسة

الاحتمال والتباديل: يمكنك حل المثال 2 بالطريقة نفسها التي استعملت في المثال 1

مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًّا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًّا. عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي $_{10}P_3$

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيسًا ومحمد نائبًا ومهند أمينًا للسر يساوي $\frac{1}{720}$.

✓ تحقق من فهمك

2) **بطاقات جامعية:** تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟

تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — التباديل مع التكرار

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \cdots r_k!}$$

مثال 3 الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟

ي ا ز م ل ا ي

الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$ استعمل الآلة الحاسبة

الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$.

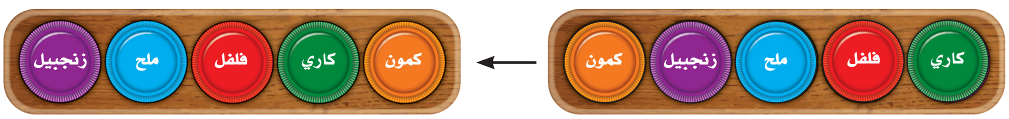
تحقق من فهمك

3) **أعداد:** تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًا باستعمال الأرقام 3, 5, 1, 2, 5, 1، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

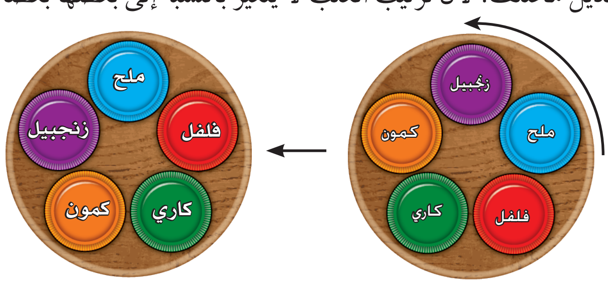
الربط بالحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة ﴿ فَأَسْقَيْنَٰكُمُوهُ ﴾ من الآية 22 من سورة الحجر.

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي !5 .



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتْ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5 - 1)!$$

مفهوم أساسي — التباديل الدائرية

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدَّد مسبقًا في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطيًّا وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

إرشادات للدراسة

التباديل الدائرية
عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسومًا على عددها.

مثال 4 الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

a) زينة: إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

b) طعام: جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجعية ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6 .

لذا؛ فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

إرشادات للدراسة

النقطة المرجعية
قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدِّد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجعية ثابتة أم لا.

تحقق من فهمك

4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

4B) كرة قدم: تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضِّح تبريرك.

الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق:** هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم.
افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظَّفَيْن من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظَّفَيْن غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظَّفَيْن.

مفهوم أساسي — التوافيق

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$ ، حيث ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

مثال 5 الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة، أي ${}_{10}C_6$.

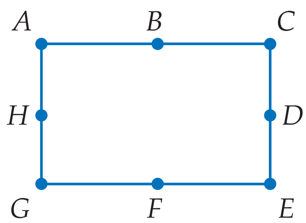
$${}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{210}$.

تحقق من فهمك

5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



إرشادات للدراسة

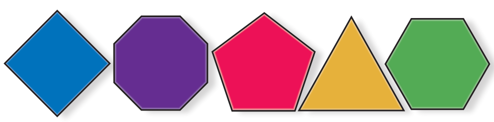
التباديل والتوافيق

استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

تأكد

مثال 1

1) **هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلّث هو الأول والمربع هو الثاني؟



مثال 2

2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

مثال 3

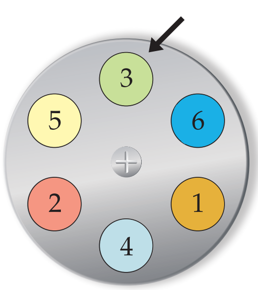
3) **أعداد:** يتكون عدد من الأرقام 5 , 6 , 6 , 3 , 3 , 3 , 1 . ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133 ؟

مثال 4

4) **كيمياء:** في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتِّبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.

a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟



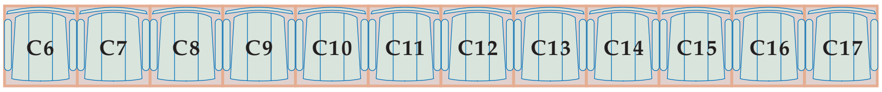
مثال 5

5) **مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1

6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



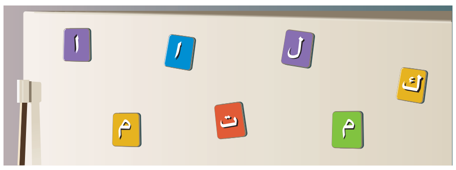
7) **حفلات:** وَزِّعت بطاقات مرقّمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23 ؟

مثال 2

8) **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

مثال 3

9) **أحرف ممغنطة:** اشترى عدنان أحرفًا ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور عشوائيًّا، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟



10) **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 7 ,9 ,5 ,7 ,2؟

مثال 4

11) **مجموعات:** يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟

12) **مدينة ألعاب:** ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟

13) **ألعاب:** رُتبت 8 كرات مرقّمة بالأرقام 13 ,12 ,11 ,9 ,8 ,7 ,6 ,2 عشوائيًّا في صف:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار على الترتيب؟

b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أدناه؟

c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟

14) **كرات:** إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6 ، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟

مثال 5

15) **مستقيمات:** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

16) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم أنها غير صحيحة أبدًا ؟ برّر إجابتك.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

17) **تحدٍّ:** يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$.
بيّن صحّة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضِّح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعاملٍ مقداره $r!$.

18) **مسألة مفتوحة:** صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$.

19) **برهان:** برهن أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

20) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق .

تدريب على اختبار

21) **احتمال:** يقف رجلان وولدان في صفٍّ واحدٍ. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفَي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

A $\frac{1}{24}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{2}$

22) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف ء س ف ي س ا

23) **احتمال:** ألقي مكعب مرقّم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقي المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

A 1

B $\frac{9}{10}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

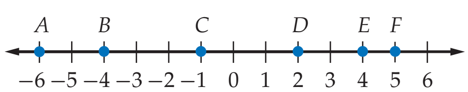
24) **تسوّق:** لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-7)

مثّل فضاء العيِّنة في كلِّ تجربةٍ ممّا يأتي بالرسم الشجري :

25) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس 1-7)

26) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، و4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. (الدرس 1-7)

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي مستعملًا خط الأعداد: (مهارة سابقة)



27) DF 28) AE

29) EF 30) BD

31) AC 32) CF

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-3 الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال الأطوال.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحات.

المفردات:

الاحتمال الهندسي
geometric probability

لماذا؟

في القرص ذي المؤشر الدَّوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

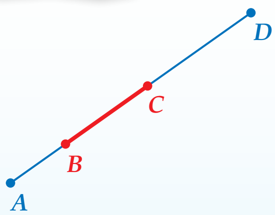
الاحتمال الهندسي: احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة **احتمالاً هندسيًّا**.

مفهوم أساسي: الاحتمال والأطوال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا على $\overline{AD}$، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

إرشادات للدراسة

الاحتمال والأطوال

$P(E \in \overline{BC})$ تعني احتمال أن تقع النقطة E على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

$P(X \in \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$ احتمال الأطوال

$= \frac{7}{14}$ $KL = 7\ ,\ JM = 3 + 7 + 4 = 14$

$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ بسِّط

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

(1A $P(X \in \overline{LM})$

(1B $P(X \in \overline{KM})$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج.

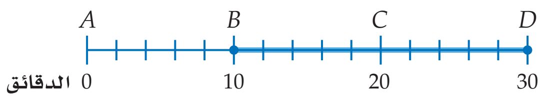
الربط بالحياة

الحافلة وسيلة نقل للركاب، تُصَمَّم بأحجام مختلفة. وتسير معظم الحافلات بالديزل أو البنزين، ومنها ما يسير بالكهرباء، وبعضها ذات مفاصل مترابطة؛ أي لها قسمان متصلان بغطاء مرن. وتسعى شركات الحافلات إلى تخفيض أجرتها؛ ليصبح النقل العام أكثر شعبية لدى المسافرين.

مثال 2 من واقع الحياة — نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الراكب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



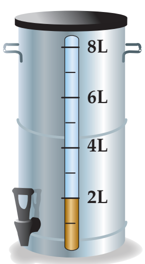
أوجد احتمال هذه الحادثة.

$P($انتظار 10 دقائق أو أكثر$) = \frac{BD}{AD}$ — احتمال الطول

$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ — $BD = 20, AD = 30$

لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريبًا.

تحقق من فهمك



2) **شاي:** يحضِّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8 L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2 L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2 L ؟

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أيِّ وقت بين 2 L و 3 L؟

الاحتمال والمساحة: تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

مفهوم أساسي — الاحتمال والمساحة

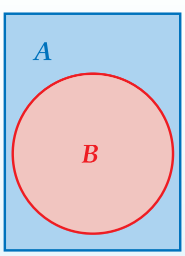
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واخترت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال: إذا اخترت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A ، فإن:

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$



وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة .
- أن احتمال وقوع الهدف في أيِّ مكانٍ من المنطقة متساوٍ .

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي $1+1+1$، أو 3 m .

$P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \dfrac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$ احتمال المساحة

$= \dfrac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$ $A=\pi r^2$

$= \dfrac{\pi}{9\pi} = \dfrac{1}{9}$ بسّط

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$، ويساوي 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **الهبوط بالمظلات:** أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

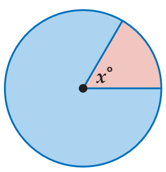
A) P(أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء)

B) P(أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء)

الربط بالحياة

الهبوط بالمظلات يتطلب جرأة لممارسته؛ حيث يقفز المظلي من ارتفاع 10.000 متر فأكثر. وينقسم إلى: القفز بالمظلة وهو آمن وسهل؛ لأنه تلقائي ولا يستلزم تحكم القافز. والقفز الحرّ وهو للمحترفين، حيث يتحكم القافز بالمظلة في موضع هبوطه.

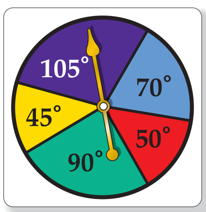
يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية $(x°)$ إلى $360°$. (ستبرهن هذا في السؤال 21) ، وعليه فإنه إذا اخترت نقطة عشوائيًّا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع يساوي $\frac{x}{360}$



مثال 4 — استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)



a) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

قياس زاوية القطاع الأصفر $45°$

$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \dfrac{45}{360} \approx 12.5\%$

b) P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

قياس زاوية القطاع البنفسجي $105°$

$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \dfrac{105}{360} \approx 29\%$

c) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق)

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50° + 70° = 120°$

$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \dfrac{360-120}{360} = \dfrac{240}{360} \approx 67\%$

إرشادات للدراسة

استعمال التقدير

في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص؛ لذا فالجواب 29% يكون معقولًا.

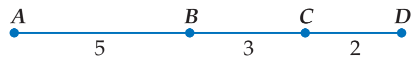
تحقق من فهمك

4A) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

4B) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

تأكد

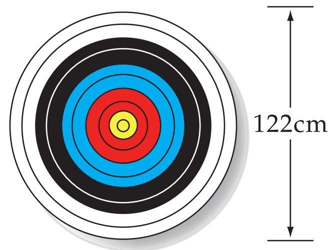
مثال 1 إذا اخترت النقطة X عشوائيًا على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:



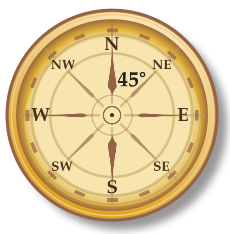
(1 $P($أن تقع X على $\overline{BD})$ **(2** $P($أن تقع X على $\overline{BC})$

مثال 2 **(3** **مواصلات:** ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟

المثالان 3, 4 **(4** **لعبة السهام:** يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف نقطة داخل الدائرة الصغرى.



(5 **ملاحة:** ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًا كما في الشكل أدناه. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).

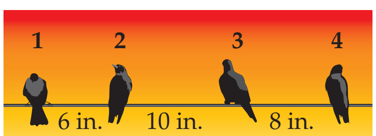


تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا اخترت النقطة X عشوائيًا على $\overline{FK}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(6 $P(X \in \overline{FH})$ **(7** $P(X \in \overline{GJ})$ **(8** $P(X \in \overline{HK})$

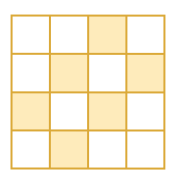
(9 **طيور:** تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًا على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟



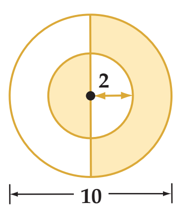
مثال 2 **(10** **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًا مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجه المفضّل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مثال 3 اخترت نقطة عشوائيًا في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

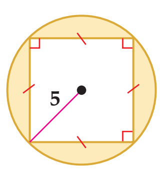
(11



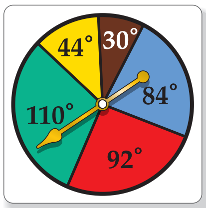
(12



(13



مثال 4 استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):



14) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

15) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

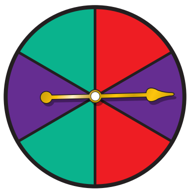
16) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

17) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)

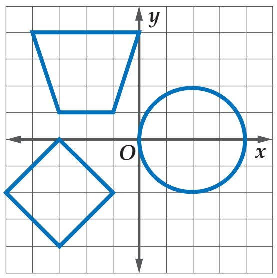
صِفْ حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكلٍّ من النماذج الآتية:

18)

19)



20) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا على الشبكة المجاورة، فأوجد كلًّا مما يأتي:



a) P(النقطة داخل الدائرة)

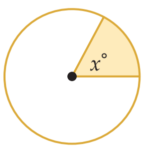
b) P(النقطة داخل شبه المنحرف)

c) P(النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)

الربط بالحياة

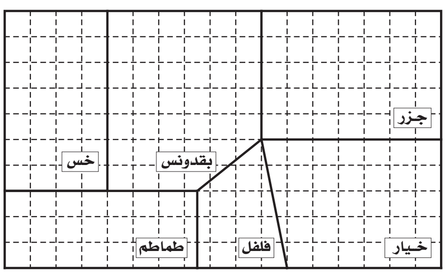
تشجّع المملكة العربية السعودية الزراعة وتوليها اهتمامًا ودعمًا، حيث تتركز الزراعة على الاكتفاء الذاتي، وتصدير القمح والتمور ومنتجات الألبان والبيض والفواكه والخضراوات والزهور إلى الأسواق في جميع أنحاء العالم.

21) **جبر:** اختيرت نقطة عشوائيًّا في الدائرة المجاورة. أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$. (إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة × $\frac{x}{360}$)



22) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائيًّا في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

23) **زراعة:** مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل المجاور،

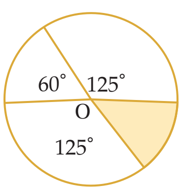


a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟

b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائيًّا لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس.

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الدائرة O في المنطقة المظلّلة، أيُّهما حلُّه صحيح؟ وضِّح تبريرك.



عمر

$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$

$= \frac{50}{360}$

$\approx 13.9\%$

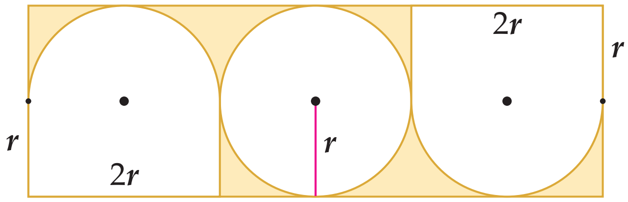
سالم

$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$

$= \frac{60}{360}$

$\approx 16.7\%$

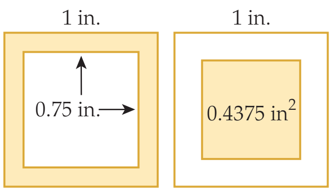
25) تحدٍّ: أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقربًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.



26) تبرير: محيط مثلَّث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلَّث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضِّح تبريرك.

27) مسألة مفتوحة: مثِّل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

28) اكتب: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من المربعين الآتيين، فوضِّح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أيٍّ منهما.



تدريب على اختبار

29) احتمال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

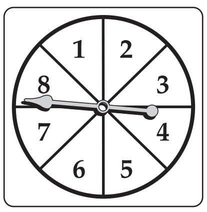
B $\frac{\pi}{9}$ **D** $\frac{9}{\pi}$

30) احتمال: يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{7}{18}$

31) إجابة قصيرة: قُسّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًّا؟

مراجعة تراكمية

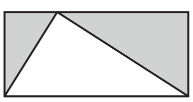
32) حفلة: يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-7)

مثِّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 1-7)

33) في كلٍّ من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S).

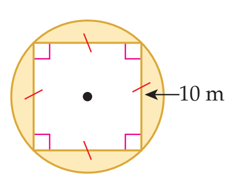
34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B).

35) هندسة: في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة)

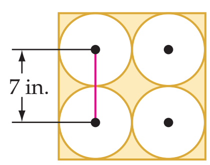


أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

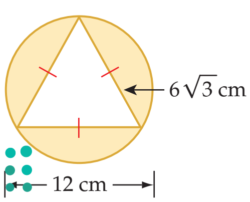
36)



37)



38)



اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-7 إلى 3-7

1) **طعام:** يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟

2) **أعداد:** كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 9 ,... ,4 ,3 ,2 ، دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

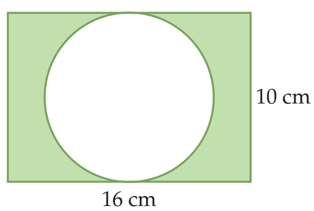
3) **ملابس:** في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثّل فضاء العيِّنة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

4) **كتابة:** يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذهِ الحروف عشوائيًّا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟

5) **نقود:** لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟

6) **نقود:** إذا ألقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟

7) **هندسة:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المستطيل في الشكل أدناه، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



8) **سيرك:** مُدَّ حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْعِ الحبل عند أيِّ نقطة من نقاطه متساوية.

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه.

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين.

اختيرت نقطة A عشوائيًّا على $\overline{BE}$ في الشكل أدناه. أوجد كلًّا ممّا يأتي:

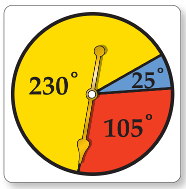
9) $P(\overline{CD}$ أن تقع A على$)$

10) $P(\overline{BD}$ أن تقع A على$)$

11) $P(\overline{CE}$ أن تقع A على$)$

12) $P(\overline{DE}$ أن تقع A على$)$

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة، فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى):

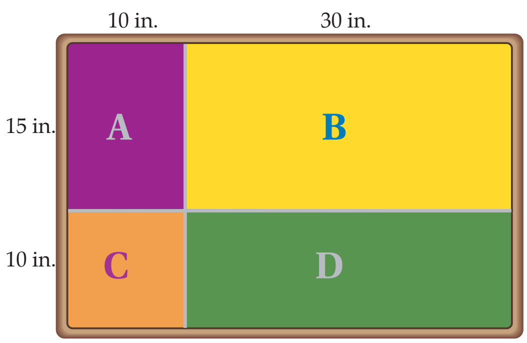


13) $P($استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء$)$

14) $P($استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء$)$

15) $P($استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء$)$

16) **لعبة السهام:** الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا ووقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



a) المنطقة A؟

b) المنطقة B؟

c) المنطقة C؟

d) المنطقة D؟

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
Probabilities of Independent and Dependent Events

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة
compound event

الحوادث المستقلة
independent events

الحوادث غير المستقلة
dependent events

الاحتمال المشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

الحادثة المشروطة
conditional event

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفِّه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأيِّ حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيِّنة قد نقص واحدًا؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كلٍّ من صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

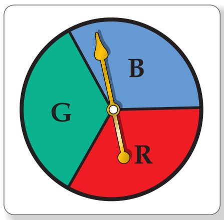
1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة

هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلًا عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، فإنّ الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلًا هي حادثة بسيطة.

إذا أُلقيت قطعة نقد وأُدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: {(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.



باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(L) = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{1}{3} \qquad P(L \cap G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضِّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

($\cap$) يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين (وقوع الحادثتين معًا)، ويشير إلى ضرب الاحتمالات.وتقرأ العبارة $P(A \cap B)$: احتمال وقوع A ووقوع B معًا.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة — احتمالات الحوادث المستقلة

وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولًا. افترض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.

السحب 1   السحب 2

$$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B)$$
احتمال الحادثتين المستقلتين

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$
$P(B) = \frac{3}{8}$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا .

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط

يجب ألّا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

قيم الاحتمال

- لأيّ حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلّة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

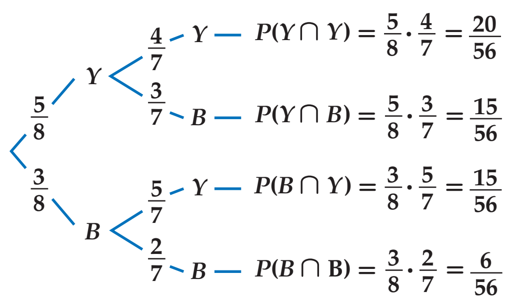
هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

$P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$ احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$ بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق: تحقق من صحّة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب احتمالَي المرحلة الأولى في فروع الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج كما في الشكل أدناه.

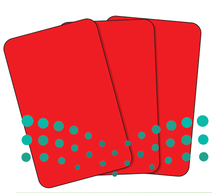


يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \checkmark$$

تحقق من فهمك

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟



الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلًا إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العيِّنة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $\{1, 3, 5\}$، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

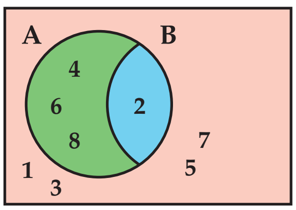
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{3}{8}$ **D** $\frac{1}{2}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًّا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



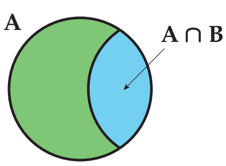
افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2
ارسم شكل فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيِّنة، وواحد منها هو 2 ؛
لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B .

تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{1}{2}$

بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل فن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
حيث: $P(A) \neq 0$.

سيبرهن هذا القانون في السؤال 16

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط
تقرأ $P(5|A)$ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

إرشادات للاختبار

أشكال فن
استعمل أشكال فن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

إرشادات للدراسة

التقاطع
تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز ∩ .

تأكد

مثال 1 حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1, 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضِّح إجابتك:

1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد ، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مثال 2 **3)** **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعِيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

مثال 3 **4)** **أوراق نقدية:** في جيب عبد السلام 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، ما احتمال أن يسحب عبد السلام عشوائيًّا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

مثال 4 **5)** **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (9–6) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:

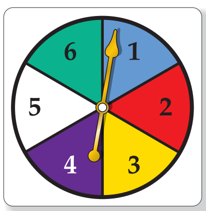
6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسَّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5 ؛ للحصول على عدد فردي.

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.

8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًّا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقِيا مرة واحدة.

10) **ألعاب:** إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟



11) **شعارات:** معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

مثال 4

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

13) مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربَّعًا؟

14) رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أنه استقر عند عدد فردي؟

15) **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟

16) **برهان:** استعمل قانون احتمال حادثتين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$

17) **تنس أرضي:** إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%، فأجب عما يأتي:

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج.

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟

الربط بالحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأً مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **اكتشف الخطأ:** أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$، والحادثتان A و B مستقلتان. أيُّهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

مهند	جابر
بما أن A و B حادثتان مستقلتان، فإن: $P(A\|B) = P(A)$	بما أننا لا نعرف $P(A \cap B)$، فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A\|B)$

19) **تحدٍّ:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n؟ وضِّح إجابتك.

20) **تبرير:** إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برّر إجابتك.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرّر إجابتك.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

A $\frac{1}{18}$ C $\frac{1}{9}$

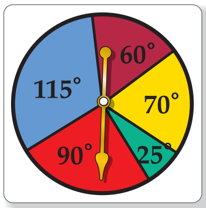
B $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

24) **احتمال:** يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشرٍ.

مراجعة تراكمية

25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقّم أُلقي مرتين؟ (الدرس 7-4)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خطٍّ بين لونين): (الدرس 7-3)



26) P(استقرار المؤشر عند اللون الأحمر)

27) P(استقرار المؤشر عند اللون الأزرق)

28) P(استقرار المؤشر عند اللون الأخضر)

29) P(استقرار المؤشر عند اللون الأصفر)

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: (الدرس 7-1)

30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع مختلفة من الحلوى.

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها.

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقّمة في آنٍ واحد.

7-5

احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. الدرس (4-7)

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:

الحادثتان المتنافيتان
mutually exclusive events

الحادثة المتممة
complement event

لماذا؟

يمكن لأيِّ طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشُّح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الحوادث المتنافية: لقد اختبرت في الدرس 4-3 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$P(A \cup B)$	$P(A \cap B)$
↑	↑
يدل على اتحاد مجموعتين	يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أيْ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد
اتحاد مجموعتين هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو إلى المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز $\cup$.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟".

a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.
هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

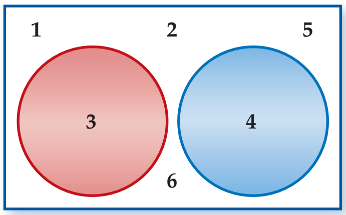
تحقق من فهمك

حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًّا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.



فمثلًا لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقّم، سترى من أشكال فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن:

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالَي الحادثتين البسيطتين.

$P(3) = \frac{1}{6}$ و $P(4) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

يوضِّح هذا المثال القانون الأول من قانونيَ الجمع في الاحتمالات.

مفهوم أساسي — احتمال الحادثتين المتنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍّ منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المتنافية.

قراءة الرياضيات

$(\cup)$ يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \cup B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B.

مثال 2 من واقع الحياة — الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًّا أو فيزيائيًّا؟

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينيًّا أوفيزيائيًّا في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني.

وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي.

مجموع الكتب هو $10 + 12 + 13 = 35$.

$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$ — احتمال الحادثتين المتنافيتين

$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$ — $P(A1) = \frac{10}{35}$ و $P(A2) = \frac{12}{35}$

$= \frac{22}{35}$ — اجمع

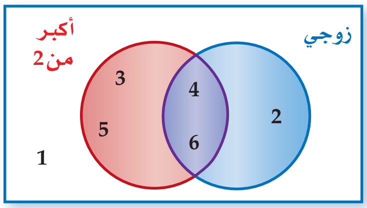
لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$، ويساوي 63% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهَي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

2B) **ألعاب:** إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟

عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي $2, 3, 4, 5, 6$. لذا فإن:



$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من } 2) = \frac{4}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6 ، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من } 2) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من } 2)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير متنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الربط بالحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذّب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

مثال 3 من واقع الحياة — الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في معرض للوحات الفنيّة، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًّا؟

لوحات إبراهيم

الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي}) = P(\text{منظر طبيعي}) + P(\text{لوحة زيتية}) - P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي})$$

عوّض $\quad = \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30}$

بسّط $\quad = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًّا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **فن:** في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًّا؟

احتمال الحادثة المتممة: عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحادثة A. فمثلًا تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: $1, 2, 3, 5, 6$. لذا فإن $\frac{5}{6}=$(عدم الحصول على العدد $P(4$.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1-\frac{1}{6}$ أو $1-P(4)$.

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز (A').

مفهوم أساسي — **احتمال الحادثة المتممة** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأيّ حادثة A، $P(A') = 1 - P(A)$

مثال 4 الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًّا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A.

$P(A') = 1 - P(A)$ احتمال المتممة

$= 1 - \frac{20}{300}$ عوِّض

$= \frac{280}{300}$ اطرح و بسّط

$= \frac{14}{15}$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **أمطار:** إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

ملخص المفاهيم — **قوانين الاحتمال** — أضف إلى مطويتك

نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A, B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأيّ حادثة A: $P(A') = 1 - P(A)$

مثال 5 من واقع الحياة — تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن % 81 من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم: تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد (الأول لا يستعمل الحزام ∪ الثاني لا يستعمل الحزام) P

خطط: الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافرض أن الحادثة B تمثّل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P(A' \cup B')$ وهي تكافئ $P[(A \cap B)']$

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

حُلّ:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	احتمال الحادثتين غير المستقلتين
$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$	$P(A) = \frac{81}{100}$
$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$	اضرب
$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$	احتمال الحادثة المتممة
$= 1 - \frac{36}{55}$	عوّض
$= \frac{19}{55}$	اطرح

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

تحقق: استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي %(81 − 100)، أو 19%

واحتمال اختيار سائقين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن 35% > 19% ، فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

5) **هواتف نقالة:** أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقّال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقّال أثناء القيادة؟

الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط بالحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

تقاطع الحوادث واتحادها

من المثال 5 لاحظ أن

$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$

وبالمثل

$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ ممّا يأتي، وبرّر إجابتك:

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة.

2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2 3) **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب ، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتابًا، أو ساعة؟

مثال 3 4) **نشاطات مدرسية:** بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضي	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4 5) **لعبة السهام:** إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

مثال 5 6) **تخرج:** عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1، 3 حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 9-7)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا:

7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.

8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3 .

9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.

10) **رياضة:** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	السباحة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

11) **هدايا:** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

مثال 4 أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

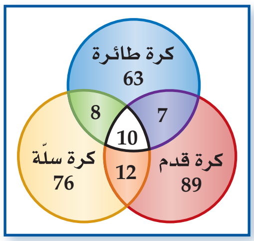
13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.

14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألّا يسحب الكرة الحمراء؟

مثال 5 15) **أجور:** من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعيًّا تساوي 71%. فإذا اختير اثنان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعيًّا؟

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة عددها 100 شخص , فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟

17) **مسح:** أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 طالباً لمعرفة أيِّ الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومُثّلت النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور . إذا اختير طالب عشوائيًّا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي:



a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة.

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولايرغبون المشاركة في كرة السلة.

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدٍّ:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقّمة متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: حدد إذا كانت الحادثتان في كلٍّ مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:

19) اختيار مثلَّث متطابق الأضلاع ومثلَّث متطابق الزاويا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 **B** 0.35 **C** 0.5 **D** 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{5}{6}$

D 1

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ثمّ أوجد الاحتمال: (الدرس 4-7)

25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعبٍ مرقّمٍ، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية.

26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة.

27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقّم وثلاث قطع نقد. (الدرس 1-7)

الفصل 7

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيّنة (الدرس 1-7)

- فضاء العيّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيّنة باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-7)

- الترتيب مهم في التباديل.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-7)

- إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي: $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$
- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائيًا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 4-7 و 5-7)

- إذا كانت الحادثة A' متممة للحادثة A فإن:
$P(A') = 1 - P(A)$
- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B، فإن: الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

المطويات منظم أفكار

تأكدمن أن المفاهيم الأساسية قد دوّنت في مطويتك.

المفردات

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد ترتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة.

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة .

8) الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو:
$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

مراجعة الدروس

7-1 تمثيل فضاء العيّنة ص 12-17

10) فشار: يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أوحجم وسط (M) أوحجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثّل فضاء العيِّنة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

11) أحذية: يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، وبلونين: بني أو أسود. فكم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟

مثال 1

أُلقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة.

أقرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالنواتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 18-24

12) مطعم: ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أيّ طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد التراتيب الممكنة؟

13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن، بحيث يتم اختيارهن عشوائيًّا من المجموعة. فما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟

14) مسابقات: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

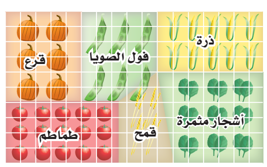
بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

$(n-1)!$	قانون التباديل الدائرية
$(4-1)!$	$n = 4$
$= 3! = 6$	بسِّط

لذا فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

7-3 الاحتمال الهندسي ص 25-30

15) زراعة: الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:



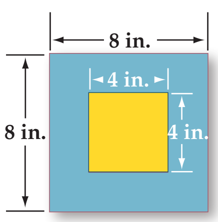
a) ما المساحة التقريبية لحقلَي فول الصويا والذرة معًا؟

b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًّا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة.

16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة، بحيث يجلس هاني على بُعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بُعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر.

مثال 3

لعبة رمي الكرة:



a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $4 \cdot 4 = 16$

$P(\text{أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء}) = \frac{16}{64} = 25\%$

b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $(8 \cdot 8) - 16 = 64 - 16 = 48$

$P(\text{ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء}) = \frac{48}{64} = 75\%$

الفصل 7

دليل الدراسة والمراجعة

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 38-32

17) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت كرتان على التوالي دون ارجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء؟

18) **مسح:** أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الشخصان من الذين يحبون المطالعة؟

مثال 4

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت كرتان على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحادثتين غير مستقلتين، ويتم حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$$P(\text{حمراء وزرقاء}) = P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء} \mid \text{حمراء})$$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10}$$

$$= \frac{9}{55} \approx 16.36\%$$

7-5 احتمالات الحوادث المتنافية ص 45-39

19) رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟

20) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقّمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًّا.

a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا أو أقل من 5؟

b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 5

عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5 .

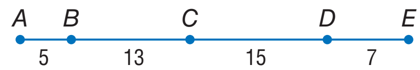
$$P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{متساويان})$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{5}{18} \approx 27.8\%$$

اختبار الفصل

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AE}$ في الشكل أدناه. فأوجد كلًّا مما يأتي:



(1 $P($ أن تقع X على $\overline{AC}$ $)$

(2 $P($ أن تقع X على $\overline{CD}$ $)$

(3 **سباحة:** يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟

(4 **سفر:** يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدّها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟

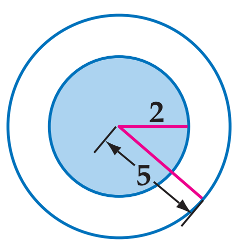
مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

(5 يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

(6 **مطعم:** أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجبن (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

(7 **كتابة:** بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟

(8 **تصويب:** يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟

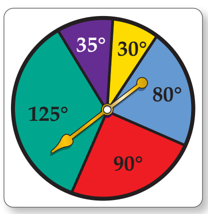


(9 **أعداد:** ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية 7, 7, 7, 7, 2, 2, 2, 6 هو **6222777**؟

(10 **مسابقات:** اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المتسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟

(11 حدد إذا كانت الحادثتان الآتيتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال: سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و 5 برتقالية مع الإرجاع.

استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خطٍّ تُعاد التجربة).



(12 P (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

(13 P (استقرار المؤشر على اللون الأحمر)

(14 P (استقرار المؤشر على لون غير الأصفر)

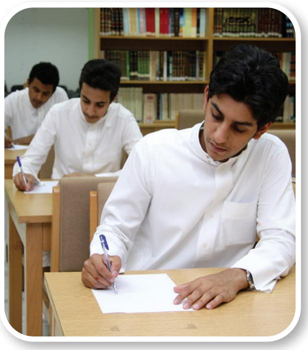
حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

(15 يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

(16 رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، وظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

(17 سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

تنظيم البيانات



تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها؛ لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة ممَّا يأتي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات مثل: التمثيل بالأعمدة، أشكال ڤن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق وطرفيه لتنظيمها.

الخطوة 2

نظِّم البيانات.

- كوّن جدولًا، أو قائمة، أو تمثيلًا بيانيًّا، أو أشكال ڤن.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكنًا.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحدد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة، وحُلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافيًا فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

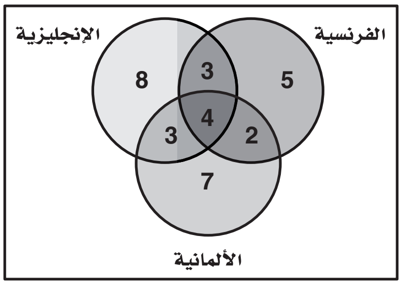
مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالبًا يتعلمون اللغة الإنجليزية، و14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط، و7 يتعلمون الألمانية فقط، و3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط، و4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معًا. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

A $\frac{9}{16}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{5}{18}$ D $\frac{7}{12}$

اقرأ المسألة بتمعُّن تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك أشكال ڤن تستطيع تنظيم البيانات، وعندئذٍ تتمكن من حلِّها.



الخطوة 1: ارسم ثلاث دوائر تمثل كلٌّ منها لغة.

الخطوة 2: ضع معطيات المسألة على الشكل.

الخطوة 3: املأ القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلًا تعلم أن 18 طالبًا يتعلمون الإنجليزية، و14 طالبًا يتعلمون الفرنسية.
$5 = 2 - 4 - 3 - 14$ (يتعلمون الفرنسية فقط).
$3 = 4 - 3 - 8 - 18$ (يتعلمون الإنجليزية والألمانية فقط).

الخطوة 4: حل المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًّا يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلّم الفرنسية. يمكنك بحسب أشكال ڤن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم:
$18 = 7 + 3 + 8$ يتعلمون الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلمون الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ ؛ لذا فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة وحدّد المطلوب، ثم نظِّم البيانات لحل المسألة.

1) لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: ا، ف، ح، ت. إذا اختارت تبديلًا عشوائيًّا لهذه الأحرف، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟

A $\frac{3}{50}$ **C** $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{24}$ **D** $\frac{1}{4}$

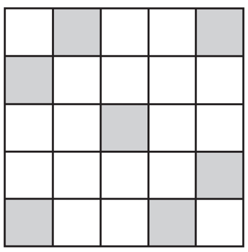
2) يبيّن الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية ، وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

A $\frac{4}{21}$ **C** $\frac{5}{17}$

B $\frac{2}{25}$ **D** $\frac{13}{25}$

3) اختيرت نقطة واحدة عشوائيًّا في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظلّلة.



A 0.22   **C** 0.28

B 0.25   **D** 0.32

4) تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و9 من الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و6 النشاط الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي و5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير طالب واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟

A $\frac{1}{5}$ **C** $\frac{5}{9}$

B $\frac{4}{18}$ **D** $\frac{2}{3}$

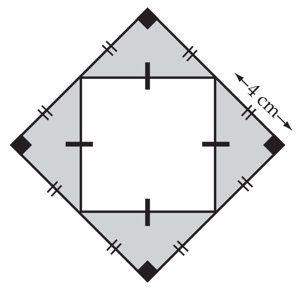
الفصل 7

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) اختيرت نقطة عشوائيًّا في الشكل المجاور، فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة ؟



A 0.0625

B 0.125

C 0.25

D 0.5

2) كم عددًا مكونًا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2,6,1 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

A 3   C 12

B 6   D 27

3) إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين في فضاء العيّنة لتجربة عشوائية ما ، وكان $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B)=\frac{1}{2}$، فما قيمة $P(A \cup B)$؟

A 0   C $\frac{5}{6}$

B $\frac{2}{5}$ D $\frac{1}{6}$

4) قيمة محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ يساوي:

A -11

B 11

C -1

D 1

5) يكتب المقدار: $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

في أبسط صورة على النحو:

A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$

B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$

C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة A؟

A 0.8

B 0.2

C 0.16

D -0.2

7) سحبت عينتان عشوائيًّا واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A ، و3 عينات من فصيلة الدم B ، و6 عينات من فصيلة الدم AB ، و5 عينات من فصيلة الدم O ، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟

A $\frac{1}{51}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{5}{51}$

D $\frac{1}{3}$

إجابة قصيرة

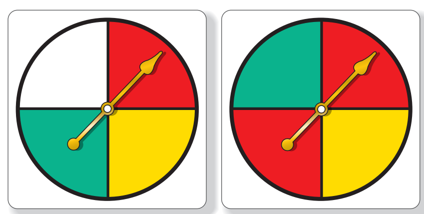
أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحبًا يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالًا؟
دلال: نعم، رزقني الله طفلين.
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟
دلال: نعم.
اعتمادًا على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟

9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$ ، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟

10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علمًا بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أيٌّ من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام فإنه يعاد تدويرهما.



11) حدِّد كلًّا من مجال الدالّة $f(x) = [x] - 5$ ومداها.

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحا خطوات الحل:

12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء وبطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بنّية و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا وسُجِّلَ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسحبت بطاقة أخرى.

a) هل الحادثتان مستقلتان أم غير مستقلتين؟ وضّح إجابتك.

b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟

c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بنيّة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	7-3	7-1	7-5	مهارة سابقة	مهارة سابقة	7-5	7-4	7-4	مهارة سابقة	7-4	مهارة سابقة	7-4

الفصل 8

حساب المثلَّثات
Trigonometry

فيما سبق:
درست تحليل الدوالّ وتمثيلها بيانيًّا.

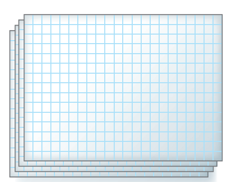
والآن:
- أجد قيم دوالّ مثلَّثية.
- أحلُّ مسائل باستعمال النسب المثلَّثية للمثلَّث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيوب التمام في حلّ المثلَّث.
- أمثّل دوالّ مثلَّثية بيانيًّا.

لماذا؟
القياس غير المباشر: للدوالّ المثلَّثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلًا يمكن استعمال النسب المثلَّثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البُعد بين جبلين أو عرض نهر.

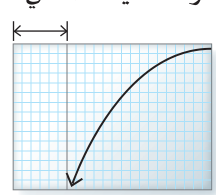
المطويات منظم أفكار

حساب المثلَّثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلَّثات، مبتدئًا بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

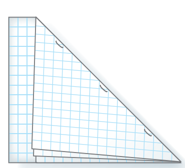
1 **جمِّع** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض.



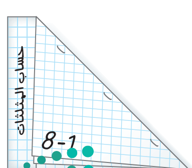
2 **اطوِ** الطرف العلوي للأوراق بحيث ينطبق على الحافة السفلية مكوّنًا مثلثًا ومستطيلًا، كما في الشكل.



3 **ثبّت** الأوراق على طول خطّ الطيّ لتشكّل كتيبًا.



4 **عنون** المستطيل بحساب المثلثات، ورقّم الصفحات بأرقام الدروس.



التهيئة للفصل الثامن

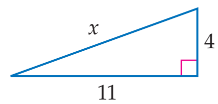
أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

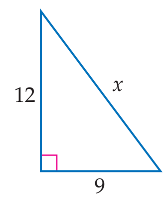
أوجد قيمة x مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

(تستعمل مع الدروس 3-8 إلى 1-8)

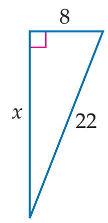
1)



2)



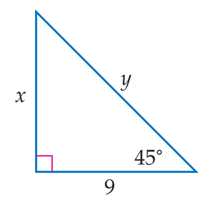
3)



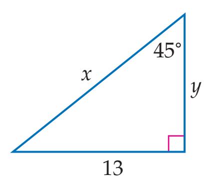
4) **حدائق:** لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 6m و 4m . يريد أن يرصف ممرًّا على قطر الحديقة. فكم سيكون طول الممر مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

أوجد القياسين المجهولين في كلٍّ مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة): (تستعمل مع الدرس 1-8)

5)



6)

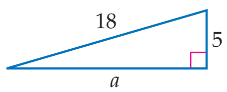


7) **سلالم:** يستند سُلَّم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية 45° . إذا كان طول السُّلَّم 12 ft، فأوجد ارتفاع قمَّته عن الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

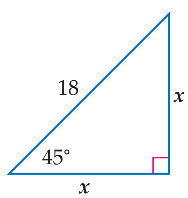
أوجد القياس المجهول في المثلَّث القائم الزاوية أدناه.



$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	عوِّض عن c بـ 18 و b بـ 5
$324 = a^2 + 25$	بسِّط
$299 = a^2$	اطرح 25 من كلا الطرفين
$17.3 \approx a$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

مثال 2

أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	اجمع الحدود المتشابهة
$2x^2 = 324$	بسِّط
$x^2 = 162$	اقسم كلًّا من الطرفين على 2
$x = \sqrt{162}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين
$x = 9\sqrt{2}$	بسِّط

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

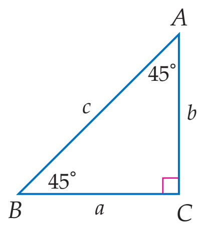
استكشاف

8-1 معمل الجداول الإلكترونية
استقصاء المثلَّثات القائمة الخاصة
Investigating Special Right Triangles

الهدف أستعمل الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أضلاع المثلّثات القائمة الزاوية الخاصة.

يمكنك استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلّثات القائمة الزاوية الخاصة.

نشاط المثلّث الذي قياسات زواياه $45° - 45° - 90°$



ضلعا المثلّث $90° - 45° - 45°$ في الشكل المجاور a, b متساويان.
ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا المثلّث؟

الخطوة 1: أدخل الصيغ المشار إليها في برنامج الجداول الإلكترونية ، حيث $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2) =B2/A2 =B2/C2 =A2/C2

45-45-90 triangles

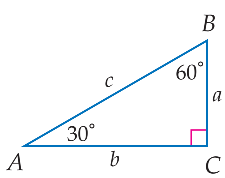
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

الخطوة 2: تحقَّق من النتائج؛ بما أن جميع المثلّثات التي قياسات زوايا كلٍّ منها $90° - 45° - 45°$ متشابهة، فإن النسب بين أضلاعها تكون ثابتة، وتكون نسبة الضلع b إلى الضلع a مساوية للعدد 1 . ونسبة كلٍّ من الضلعين a, b إلى الضلع c مساوية للعدد 0.71 تقريبًا.

حلِّل النموذج:

استعمل برنامج الجداول الإلكترونية المبيَّن أدناه للمثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 60° - 30°$.



30-60-90 triangles

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

1) انسخ ثم أكمل الورقة الإلكترونية أعلاه.

2) صِفِ العلاقة بين أطوال أضلاع المثلَّث $90° - 60° - 30°$ المُعطاة في الشكل أعلاه.

3) ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا النوع من المثلّثات؟

8-1 الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية
Trigonometric Functions in Right Triangles

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

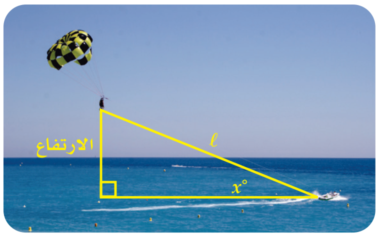
فيما سبق:
درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلَّثات قائمة الزاوية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا حادّة.
- أستعمل الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلَّثات قائمة الزاوية.

المفردات:
حساب المثلَّثات
trigonometry
النسبة المثلَّثية
trigonometric ratio
الدالّة المثلَّثية
trigonometric function
الجيب
sine
جيب التمام
cosine
الظلّ
tangent
قاطع التمام
cosecant
القاطع
secant
ظلّ التمام
cotangent
دوالّ المقلوب
reciprocal functions
معكوس الجيب
inverse sine
معكوس جيب التمام
inverse cosine
معكوس الظلّ
inverse tangent
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

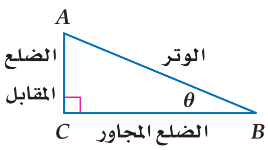
لماذا؟

يعتمد ارتفاع الشخص في التزلُّج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية $x°$ التي يصنعها الحبل مع الخطّ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلِّج.



الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة يُعرّف **حساب المثلَّثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلَّث وأضلاعه. وتقارن **النسبة المثلَّثية** بين طولَي ضلعين في المثلَّث القائم الزاوية، أمّا **الدالّة المثلَّثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلَّثية.

يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويُقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادّة في المثلَّث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوالّ المثلَّثية الستِّ.



مفهوم أساسي — جميع الدوالّ المثلَّثية في مثلَّث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثِّل قياس زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، فإنّ الدوالّ المثلَّثية الستَّ تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

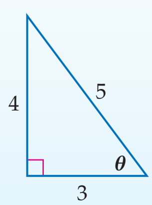
الرموز:

$\sin\theta$ (θ جيب) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\csc\theta$ (θ قاطع تمام) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\cos\theta$ (θ جيب تمام) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\sec\theta$ (θ قاطع) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta$ (θ ظل) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\qquad$ $\cot\theta$ (θ ظل تمام) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة:



$\sin\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\csc\theta = \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{3}{4}$

مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

إذا كانت θ تمثِّل قياس زاوية حادّة في المثلَّث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

$\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{8}{17}$ $\qquad$ $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{15}{17}$ $\qquad$ $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{8}{15}$

$\csc\theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \dfrac{17}{8}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \dfrac{17}{15}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \dfrac{15}{8}$

تحقق من فهمك

1) أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية B الواردة أعلاه.

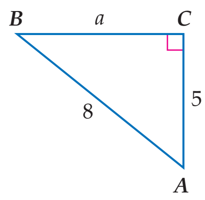
لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظلّ على الترتيب. وتُستعمل في تعريف **دوالّ المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مجال أيّ دالّة مثلَّثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادّة θ في المثلّث القائم الزاوية؛ لذا فإن قيم الدوالّ المثلّثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادّة وليس على أطوال أضلاع المثلّث القائم الزاوية؛ أي أنّ قيم الدوالّ المثلّثية للزاوية الحادّة ستبقى كما هي مهما اختلفت أطوال أضلاع المثلّث.

مثال 2 إيجاد النسب المثلَّثية

$\angle B$ زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فأوجد قيمة $\tan B$.



الخطوة 1: ارسم مثلَّثا قائم الزاوية وسمِّ إحدى زواياه الحادّة B.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$. فحدِّد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$a^2 + 5^2 = 8^2$ $b = 5,\ c = 8$

$a^2 + 25 = 64$ بسِّط

$a^2 = 39$ اطرح 25 من كلا الطرفين

$a = \pm\sqrt{39}$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$a = \sqrt{39}$ الطول لا يمكن أن يكون سالبًا

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالّة الظلّ

$= \frac{5}{\sqrt{39}}$ عوِّض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$

$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$ أنطق المقام

تحقق من فهمك

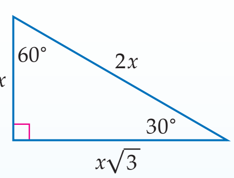
2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد قيمة $\sin B$.

تتكرَّر الزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ كثيرًا في حساب المثلَّثات.

مفهوم أساسي بعض قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصة

أضف إلى مطويتك

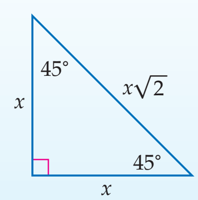
نستنتج من المثلَّث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$

نستنتج من المثلَّث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:



$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$

قراءة الرياضيات

تسمية المثلَّثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلَّث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية، وتتضح دلالة الحرف من السياق.

تاريخ الرياضيات

اكتشف علماء العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلَّثات، واستعملوها في حلّ المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علمًا مستقلًا عن علم الفلك.

ومن أبرز هؤلاء العلماء:

البيروني (أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني(362-439 هـ)).

الطوسي (نصر الدين الطوسي(597-672 هـ)).

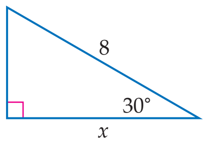
الكاشي (غياث الدين بن مسعود الكاشي (تُوفي سنة 839 هـ)).

البتاني (ابن عبد الله بن محمد بن سليمان الحراني (235-316 هـ)).

استعمال الدوالّ المثلَّثية : يمكنك استعمال الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلَّث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية °30 .
استعمل دالّة جيب التمام لإيجاد قيمة x .

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ دالّة جيب التمام

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ عوِّض عن θ بـ °30 ، المجاور بـ x، الوتر بـ 8

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

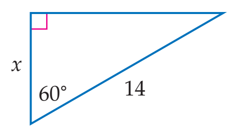
$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ اضرب كلًّا من الطرفين في 8

$6.9 \approx x$ استعمل الآلة الحاسبة

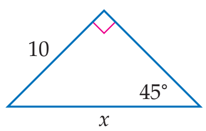
تحقق من فهمك

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(3A



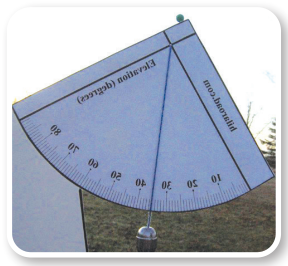
(3B



إرشادات للدراسة

اختيار دالّة
إذا كان طول الوتر مجهولًا فإنه يجب استعمال دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلَّثات التي لا تتضمّن زواياها أيـًّا من الزوايا: °30, °45, °60 .

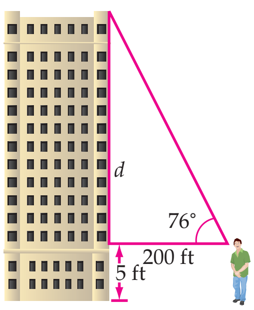


الربط بالحياة

مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات. كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول

بناية : لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة **200 ft** مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خطّ نظره المارّ بقمَّة البناية والخطّ الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع **5 ft**، فما ارتفاع البناية؟



الزاوية المقيسة كما يوضِّح الشكل هي °76. طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالّة الظل لإيجاد d .

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالّة الظلّ

$\tan 76° = \frac{d}{200}$ عوِّض عن θ بـ °76 ، والمقابل بـ d ، والمجاور بـ 200

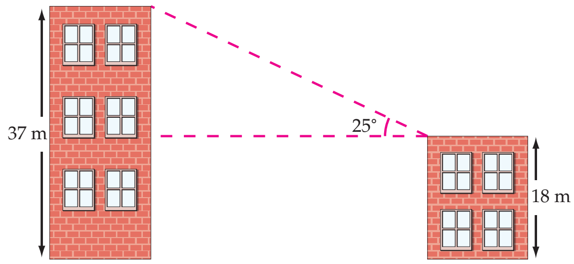
$200 \tan 76° = d$ اضرب الطرفين في 200

$802 \approx d$ استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض ، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **بنايات:** في الشكل المجاور بنايتان، ارتفاع إحداهما 18 m، وارتفاع الأخرى 37 m، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمّة البناية الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي بين البنايتين والخط المارّ من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو 25°. فما المسافة الأفقية بين البنايتين؟



عند حلِّ معادلات مثل $3x = -27$، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلّثية

تُقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x، وتعني: الزاوية التي جيبها x، يشبه هذا الرمز رمز الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$.

كن حذرًا ولا تخلط هذا الرمز مع رمز الأُسّ السالب؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلّثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيبها يساوي x، فإن: **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30^\circ$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: **معكوس جيب تمام** x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45^\circ$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وظلّها يساوي x، فإن: **معكوس ظل** x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60^\circ$

إذا علمت الجيب، أوجيب التمام أوالظل لزاوية حادّة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلّثية المعلومة.

إرشادات للدراسة

استعمال الآلة الحاسبة

لإيجاد $\sin^{-1} \frac{6}{10}$ باستعمال الآلة الحاسبة، اضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليسار إلى اليمين

SHIFT sin (6 ÷ 10) =

ستحصل على الإجابة 36.9°، ولإيجاد $\cos^{-1} \frac{8}{16}$ اضغط على المفاتيح

SHIFT cos (8 ÷ 16) =

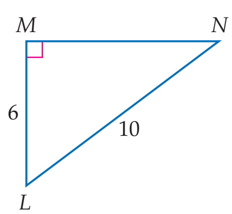
وستحصل على الإجابة 60°

مثال 5 — إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كلِّ زاوية مما يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

a) $\angle N$

بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمل دالّة الجيب.



$\sin N = \frac{6}{10}$ $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$ معكوس الجيب

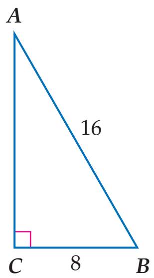
$36.9^\circ \approx m\angle N$ استعمل الآلة الحاسبة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

b) $\angle B$

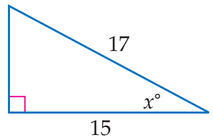
استعمل دالّة جيب التمام.

$\cos B = \frac{8}{16}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$	معكوس جيب التمام
$60° = m\angle B$	استعمل الآلة الحاسبة

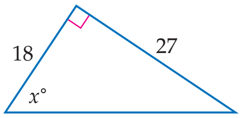


تحقق من فهمك أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

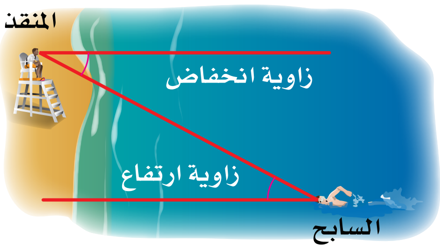
5A)



5B)



في الشكل المجاور، تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر السابح إلى المنقذ والخطِّ الأفقي له **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر المنقذ إلى السابحِ والخطِّ الأفقي له **زاوية الانخفاضِ**.

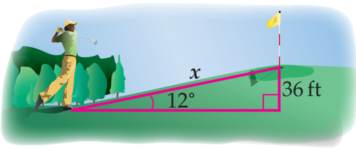


إرشادات للدراسة

زوايا الارتفاع والانخفاض
زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان؛ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين .

مثال 6 استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

a) لعبة الجولف: يقف لاعب جولف أسفل تَلّ، وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التلّ 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التلّ عن الحفرة هي °12، فأوجد المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة.

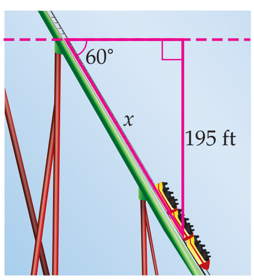


اكتب معادلة باستعمال دالّة مثلَّثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية °12) إلى المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة (الوتر).

$\sin 12° = \frac{36}{x}$	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$x \sin 12° = 36$	اضرب كلًّا من الطرفين في x
$x = \frac{36}{\sin 12°}$	اقسم كلًّا من الطرفين على $\sin 12°$
$x \approx 173.2$	استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة تساوي: 173.2 ft تقريبًا.

b) العربة الدوارة: قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوَّارة في إحدى مدن الألعاب هي °60. وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.



اكتب معادلة باستعمال دالّة مثلَّثية تتضمّن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية °60) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

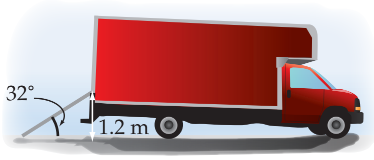
$\sin 60° = \frac{195}{x}$	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$x \sin 60° = 195$	اضرب كلًّا من الطرفين في x
$x = \frac{195}{\sin 60°}$	اقسم كلًّا من الطرفين على $\sin 60°$
$x \approx 225.2$	استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 ft تقريبًا.

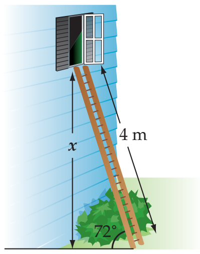
الربط بالحياة

أكثر العربات الدوَّارة انحدارًا في العالم لها زاوية انحدار (انخفاض) تقارب °90 .

تحقق من فهمك



6A) **تفريغ حمولة:** استُعمِل سطحٌ مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها °32. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل.

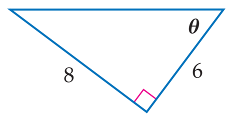


6B) **سلالم:** سُلَّمٌ طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها °72. ما ارتفاع قمَّة السلَّم عن الأرض؟

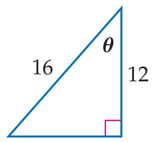
تأكـد

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ الموضَّحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1)



2)



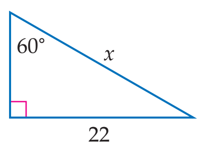
مثال 2 معتبرًا $\angle A$ زاوية حادّة في مثلَّث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

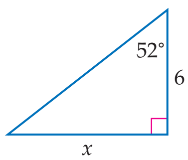
4) إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$، فما قيمة $\cos A$؟

مثال 3 استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

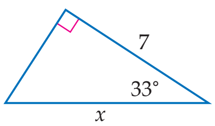
5)



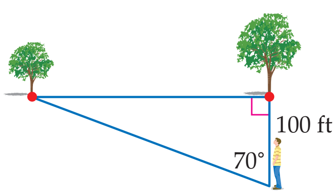
6)



7)

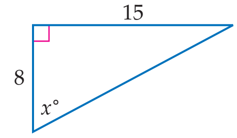


مثال 4 **8)** **أشجار:** يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرَّك مبتعدًا عن مكانه مسافة 100 ft، في مسار عموديّ على الخطِّ الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قياسها °70 ، فما البُعد بين الشجرتين؟

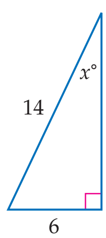


مثال 5 أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

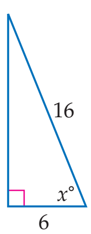
9)



10)



11)

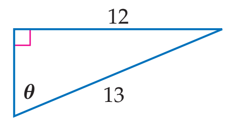


مثال 6 **12)** **سلالم:** إذا علمت أن زاوية ارتفاع السلالم المُوصَى بها لمكافحة الحرائق هي °75، فإلى أيِّ ارتفاع على بناية يمكن أن يصل سُلَّم طوله 6.5 m، إذا تمَّ الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

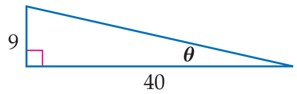
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ الموضّحة في كلٍّ ممّا يأتي:

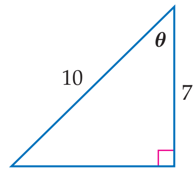
(13



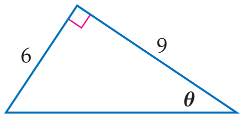
(14



(15



(16



مثال 2 إذا علمت أن $\angle B$, $\angle A$ زاويتان حادّتان في مثلّث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

(17 إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$، فما قيمة $\cos A$؟

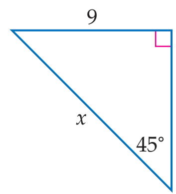
(18 إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$، فما قيمة $\tan A$؟

(19 إذا كان $\tan B = 3$، فما قيمة $\sin B$؟

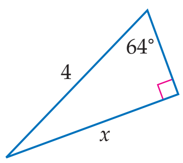
(20 إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$؟

المثالان 3, 4 في كلٍّ ممّا يأتي، استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

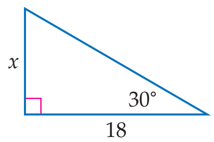
(21



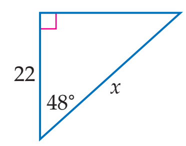
(22



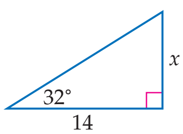
(23



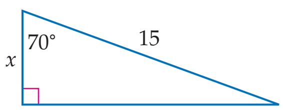
(24



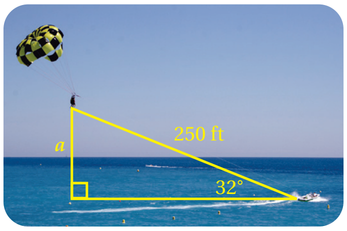
(25



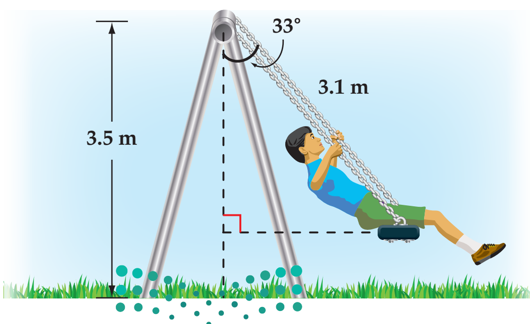
(26



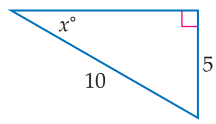
(27 **تزلّج هوائي:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، واستعن بالمثلّث إلى اليسار في إيجاد قيمة a التي تُمثّل ارتفاع المتزلّج، إذا كان طول حبل السحب 250 ft، وقياس الزاوية المحصورة بين الحبل والخطّ الأفقي يساوي 32°، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

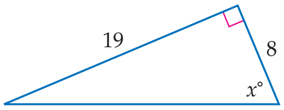


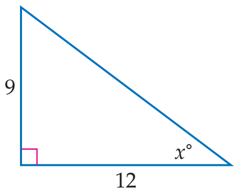
(28 **أرجوحة:** يلعب طفل على أرجوحة في متنزّه، فإذا كان ارتفاع أعلى الأرجوحة من الأرض 3.5 m، والزاوية التي يصنعها حبل الأرجوحة مع الخطّ العمودي على الأرض في لحظة ما، كما هو مُبيّن في الشكل المجاور، فأوجد ارتفاع مقعد الأرجوحة عن الأرض في تلك اللحظة.

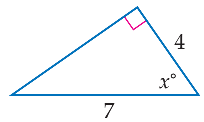


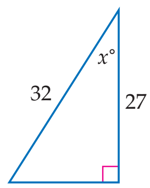
مثال 5 في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

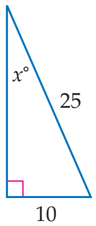
(29


(30


(31


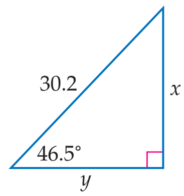
(32


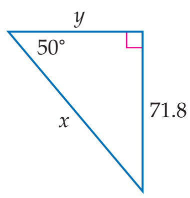
(33


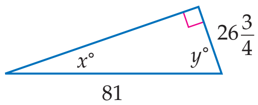
(34


مثال 6 **(35** **تسلّق:** تسلّق أحد الأشخاص تلًّا بزاوية ارتفاع قياسها $20°$، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها $18\ m$.

في كلٍّ ممَّا يأتي، استعمل دوالّ مثلَّثية، لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(36


(37


(38


حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

(39 $\cos A = \frac{3}{19}$ **(40** $\sin N = \frac{9}{11}$

(41 $\tan X = 15$ **(42** $\sin T = 0.35$

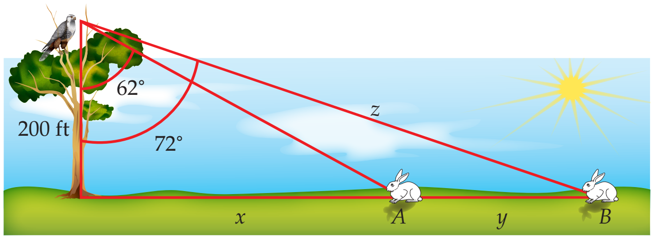
(43 $\tan G = 0.125$ **(44** $\cos Z = 0.98$

(45 **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عُشّ طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها $74.5°$، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع $5\ ft$ عن سطح الأرض، وكانت تقف على بُعد $12\ ft$ من قاعدة الشجرة، فما ارتفاع عُشّ الطائر عن سطح الأرض، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟

(46 **صقور:** رأى صقر من ارتفاع $200\ ft$ أرنبين A, B كما هو موضَّح في الشكل.

a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟

b) ما البُعد بين الأرنبين؟



الربط بالحياة

يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها 10 cm من 1.5 km، كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقضُّ بسرعة 100 ميل / الساعة.

في $\triangle ABC$، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المُعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

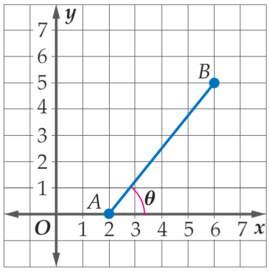
(47 $m\angle A = 36°, a = 12$

(48 $m\angle B = 31°, b = 19$

(49 $a = 8, c = 17$

(50 $\tan A = \frac{4}{5},\ a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا



(51 تحدٍّ: قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0), B(6, 5)$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور، ما قياس الزاوية الحادّة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x؟ وضِّح كيف وجدت القياس.

(52 تبرير: بيِّن ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك:
قيمة دالّة الجيب لأيِّ زاوية حادّة، لن تكون سالبة أبدًا.

(53 إجابة مفتوحة: في المثلَّث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أنّ: $\sin A = \sin C$، فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلَّث؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

(54 إذا كان ثمن شطيرة x ريالًا، وثمن علبة عصير y ريالًا، وثمن شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالات، وثمن ثلاث شطائر مع علبتي عصير 7.25 ريالات، فأيُّ المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(55 نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل $240\ cm^2$، فكم سنتمترًا طول قطر المستطيل؟

A 26

C 30

B 28

D 32

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

(56 $\frac{14a^4c^2}{6ab^3} \cdot \frac{15a^2b^2}{21ac}$

(57 $\frac{35cf^4}{18ab^3} \div \frac{14c^2f^5}{qa^2}$

(58 $\frac{12a^2-12}{a^2-4} \div \frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10}$

أوجد مجموع حدود كلِّ متسلسلة مما يأتي:

(59 $8 + 8 + 13 + \ldots + 58$ (مهارة سابقة)

(60 $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ (مهارة سابقة)

الزوايا وقياساتها
Angles and Angle Measure

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات. الدرس (8-1)

والآن:

- أرسم زوايا في الوضع القياسي، وأجد قياساتها.
- أحوّل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات:

الوضع القياسي
standard position

ضلع الابتداء
initial side

ضلع الانتهاء
terminal side

الراديان
radian

الزاوية المركزية
central angle

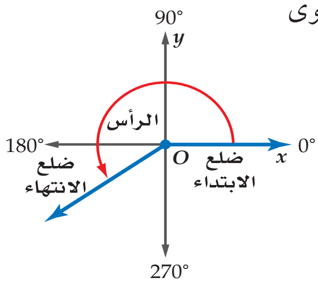
طول القوس
arc length

لماذا؟

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظلّ الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظلّ على القرص °15 كلَّ ساعة.

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقًا على الجزء الموجب من المحور x.

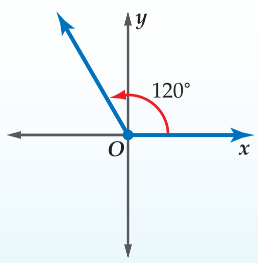
- يُسمّى الضلع المنطبِق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

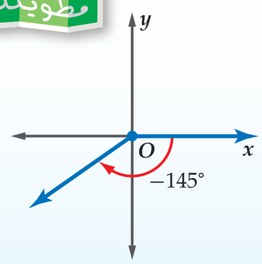


مفهوم أساسي — قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.





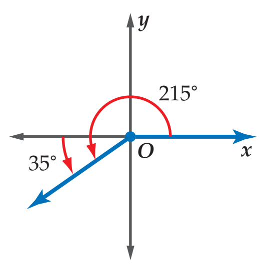
مثال 1 رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًّا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

a) $215°$

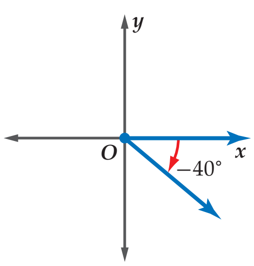
$215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °35 بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء السالب من المحور x .



b) $-40°$

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °40 بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء الموجب من المحور x .



✓ **تحقق من فهمك**

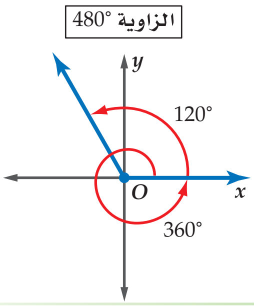
1A) $80°$

1B) $-105°$

يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة.

فعلى سبيل المثال:

دورة كاملة مقدارها 360° إضافة إلى دورة بمقدار 120° تشكّلان زاوية قياسها $360° + 120° = 480°$

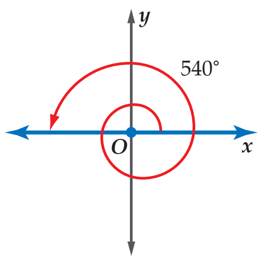


مثال 2 من واقع الحياة — رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلُّج المائي: يتضمّن التزلُّج المائي أن يقوم المتزلّج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء في أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار 540° في الهواء، فارسم زاوية قياسها 540° في الوضع القياسي.

$540° = 360° + 180°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° بدءًا من الجزء الموجب من المحور x .



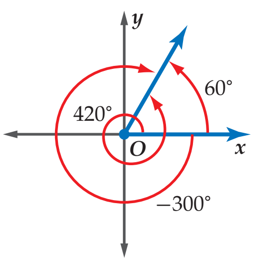
الربط بالحياة

التزلُّج المائي رياضة يضع فيها المتزلّج زلّاجة من الزجاج الليفي، أو من أنواع مختلفة من الخشب في قدميه، ويتم سحبه فوق الماء بواسطة زورق ذي محرّك سريع.

تحقق من فهمك

2) **عجلات:** أوقف سعيد درّاجته، فتحرّكت عجلتاها بزاوية قياسها 600°، ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي.

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: $-300°$, $420°$, $60°$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور.



يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360°.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

مثال 3 — إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كلٍّ ممّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

a) 130°

زاوية بقياس موجب: $130° + 360° = 490°$ — **أضف 360°**

زاوية بقياس سالب: $130° - 360° = -230°$ — **اطرح 360°**

b) −200°

زاوية بقياس موجب: $-200° + 360° = 160°$ — **أضف 360°**

زاوية بقياس سالب: $-200° - 360° = -560°$ — **اطرح 360°**

تحقق من فهمك

3A) $15°$ **3B)** $-45°$

إرشادات للدراسة

القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

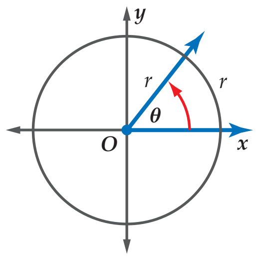
- قياس زاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالبًا إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

قراءة الرياضيات

القياس بالراديان

كلمة راديان أو rad تُحذف عادة عندما يتمّ التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس مُعطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند إلى طول قوس من دائرة. فقياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدّد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة هو 1 **راديان** (rad)



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi \text{ rad} = 360°$، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi \text{ rad} = 360° \text{ أي أن } \pi \text{ rad} = 180°$$

مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\dfrac{180°}{\pi \text{ rad}}$

مثال 4 — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

a) $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\dfrac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\cancel{\pi}}{2} \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{180°}{\cancel{\pi \text{ rad}}}$$

$$= \frac{900°}{2} = 450°$$

تحقق من فهمك

4A) $120°$

4B) $-\dfrac{3\pi}{8}$

ملخّص المفهوم — القياس بالدرجات وبالراديان

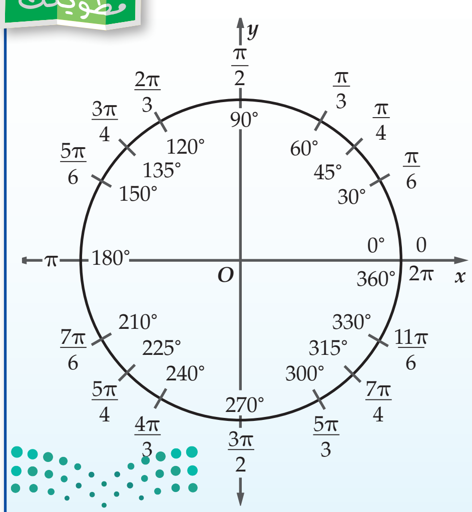
أضف إلى مطويتك

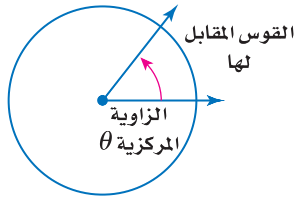
يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصّة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصّة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$45° = \frac{\pi}{4} \qquad 30° = \frac{\pi}{6}$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \qquad 60° = \frac{\pi}{3}$$





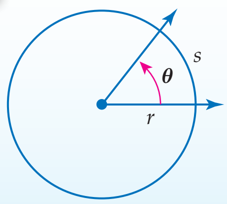
الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.

مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$



سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال (48)

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد طول القوس

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in، ما المسافة بالقدم التي يقطعها الإطار بعد أن تدور إطارات الشاحنة ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ قياس الزاوية هو $\frac{3}{4}$ الدورة الكاملة

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ صيغة طول القوس

$= 33 \cdot \frac{3\pi}{2}$ عوِّض عن r بـ 33 و θ بـ $\frac{3\pi}{2}$

≈ 155.5 in استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

≈ 13.0 ft اقسم على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

إذن إطار الشاحنة قطع مسافة 13 ft تقريبًا بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.

تحقق من فهمك

5) **مطاعم:** يقع في أعلى برج الخرج مطعم دوَّار، نصف قطره 90 ft، حيث يدور الجناح المخصَّص لتقديم الطعام والقريب من النوافذ الخارجية دورة كاملة كل 90 دقيقة. إذا ذهب شخص للمطعم لتناول العشاء وجلس على طاولة بجانب النافذة عند الساعة 6:42 مساءً وانتهى عند الساعة 8:00 مساءً، فما المسافة التي دارها؟

تنبيه

طول القوس

تذكَّر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكَّر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تأكد

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) $140°$ 2) $-60°$ 3) $390°$

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

4) $25°$ 5) $175°$ 6) $-100°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

7) $\frac{\pi}{4}$ 8) $225°$ 9) $-40°$

مثال 5 10) **تنس طاولة:** تحرَّك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوسٍ من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي $100°$، فما طول هذا القوس، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

(11 $75°$ **(12** $160°$ **(13** $-90°$

(14 $-120°$ **(15** $295°$ **(16** $510°$

(17 **جمباز:** يتأرجح لاعب جمباز على جهاز له عارضتان، ليدور بزاوية قياسها $240°$. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(18 $50°$ **(19** $95°$ **(20** $205°$

(21 $350°$ **(22** $-80°$ **(23** $-195°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

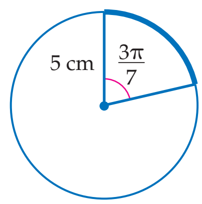
(24 $330°$ **(25** $\frac{5\pi}{6}$ **(26** $-\frac{\pi}{3}$

(27 $-50°$ **(28** $190°$ **(29** $-\frac{7\pi}{3}$

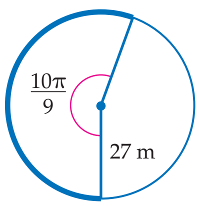
مثال 5 **(30** **رياضة:** درَّاجة ذات عجلة واحدة نصف قطرها 0.8 ft، ما المسافة التي تقطعها العجلة إذا دارت $\frac{1}{4}$ دورة؟

أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(31



(32



(33 **ساعات:** كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزاوية قياسها 2.5π راديان؟

(34 **المزولة:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس، نجد أن الظلّ يدور على القرص $15°$ كلَّ ساعة.

a) بعد كم ساعة يدور الظلُّ بزاوية قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظلّ بعد مرور 5 ساعات؟

c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظلِّ على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

الربط بالحياة

استُعمِلت المزولة قديمًا في المسجد الأقصى لمعرفة أوقات الصلاة.

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(35 $620°$ **(36** $-400°$ **(37** $-\frac{3\pi}{4}$ **(38** $\frac{19\pi}{6}$

(39 **تمثيلات متعدِّدة:** لديك النقطتان $C(6, 0), D(6, 8)$.

a) **هندسيًا:** ارسم المثلَّث $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل.

b) **جبريًا:** أوجد ظلّ $\angle CED$.

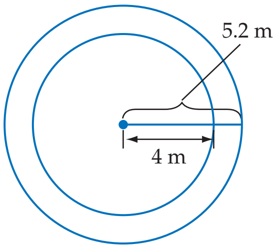
c) **جبريًا:** أوجد ميل $\overline{ED}$.

d) **لفظيًا:** ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظلّ الزاوية؟

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

40) $\frac{21\pi}{8}$ 41) $124°$ 42) $-200°$ 43) 5

44) **أحصنة دوّارة :** في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها 4m، والثانية خارجية طول نصف قطرها 5.2m. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

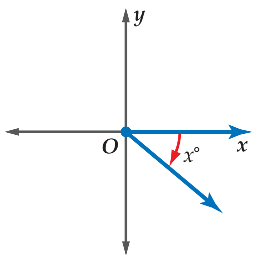


a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة.

b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

45) **اكتشف الخطأ :** كتب كلٌّ من عليٍّ وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.



علي	أحمد
$(x - 360)°$	$(360 - x)°$

46) **تحدٍّ :** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم.

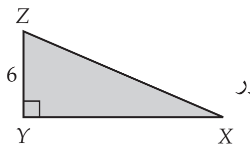
47) **مسألة مفتوحة :** ارسم زاوية حادّة في الوضع القياسي وسمِّها. وأوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية.

48) **برهان :** برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية.

تدريب على اختبار

49) إذا كان $(x + 6)(x + 8) - (x - 7)(x - 5) = 0$ ، فأوجد قيمة x .

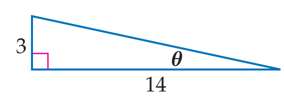
50) **هندسة :** إذا كانت مساحة المثلّث المجاور 60 وحدة مربّعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟

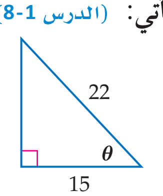


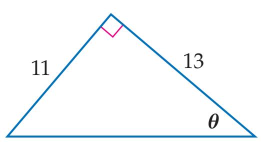
A $2\sqrt{34}$ B $4\sqrt{109}$ C $2\sqrt{109}$ D $4\sqrt{34}$

مراجعة تراكمية

أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 1-8)

51) 

52) 

53) 

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

54) $a + 1 = \frac{6}{a}$

55) $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$

56) $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلّثات القائمة الزاوية التي طول كلٍّ من ساقيها كما يأتي: (مهارة سابقة)

57) $a = 12, b = 15$

58) $a = 8, b = 17$

59) $a = 14, b = 11$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا
Trigonometric Functions of Angles

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة. الدرس (1-8)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية.
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية.

المفردات:

الزاوية الربعية
quadrantal angle

الزاوية المرجعية
reference angle

لماذا؟

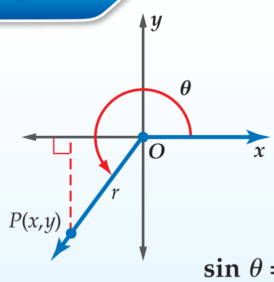
تنتشر العجلة الدوّارة في كُبْريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من °90.

الدوالّ المثلَّثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا قياساتها تزيد على °90 أو تقلُّ عن °0.

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلَّثية للزوايا

أضف إلى

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثِّل البُعد بين نقطة الأصل والنقطة P. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوالّ المثلَّثية الستُّ للزاوية θ معرَّفة كما يأتي:

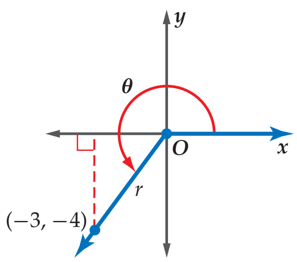


$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

مثال 1 — إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية بمعلومية نقطة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-3, -4)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.



الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة الدوالّ المثلَّثية الستِّ.

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-6, 2)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

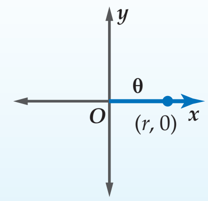
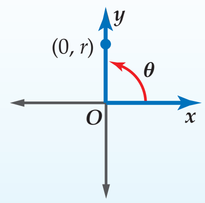
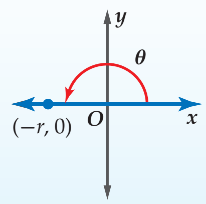
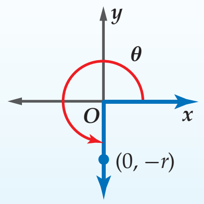
إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية

قياس أيِّ زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

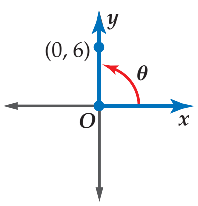
مفهوم أساسي: الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad
			
$(r, 0)$	$(0, r)$	$(-r, 0)$	$(0, -r)$

مثال 2: الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, 6)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية السِّتِّ للزاوية θ.



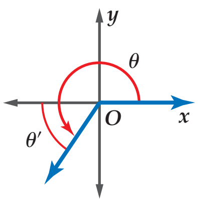
تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي $90°$. استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة الدوالّ المثلَّثية.

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \cancel{\frac{6}{0}}$ (غير معرَّفة)

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \cancel{\frac{6}{0}}$ (غير معرَّفة) $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$

تحقق من فهمك

2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-2, 0)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية السِّتِّ للزاوية θ.



الدوالّ المثلَّثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادَّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيِّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

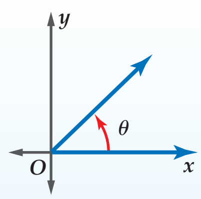
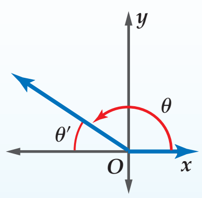
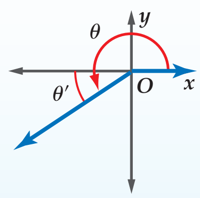
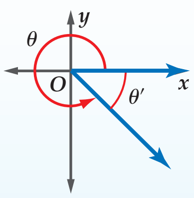
قراءة الرياضيات

الرمز θ'

θ' يُقرأ: ثيتا شرطة.

مفهوم أساسي: الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين $0°, 360°$ ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ.

إرشادات للدراسة

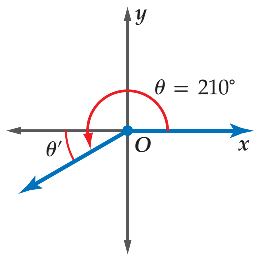
رسم الزوايا في الوضع القياسي

يمكنك الرجوع إلى الشكل الموجود في ملخّص المفهوم في الدرس 2-4؛ لمساعدتك على رسم الزوايا في الوضع القياسي.

مثال 3 إيجاد الزوايا المرجعية

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

a) $210°$

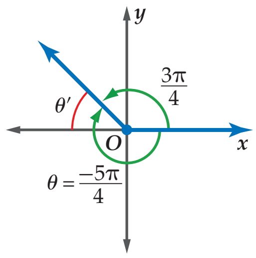


ضلع الانتهاء للزاوية $210°$ يقع في الربع الثالث.

$$\theta' = \theta - 180°$$
$$= 210° - 180° = 30°$$

b) $-\frac{5\pi}{4}$

الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني.

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

تحقق من فهمك

3A) $-110°$

3B) $\frac{9\pi}{3}$

إرشادات للدراسة

الدورة الكاملة $[0°, 360°]$

لإيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ، وقياسها موجب محصور بين $0°, 360°$:

- إذا كانت θ أكبر من $360°$، فاطرح منها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.
- إذا كانت θ أصغر من $0°$، فأضف إليها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.

لإيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية θ، يمكنك استعمال الزوايا المرجعية وتُحدّد إشارة كلِّ دالّة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

مفهوم أساسي إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدّد إشارة قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ.

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta: +$	$\sin\theta, \csc\theta: +$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: -$	$\tan\theta, \cot\theta: +$
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta: -$	$\sin\theta, \csc\theta: -$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: +$	$\tan\theta, \cot\theta: -$

يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

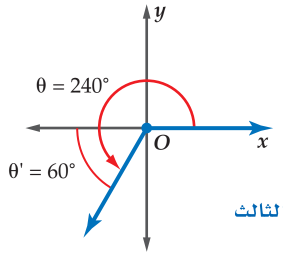
قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصّة

الجيب	جيب التمام	الظلّ	قاطع التمام	القاطع	ظلّ التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالّة مثلَّثية

أوجد القيمة الدقيقة للدالّة المثلَّثية في كلٍّ ممَّا يأتي:

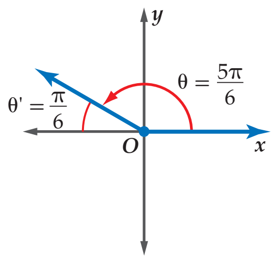
(a $\cos 240°$



يقع ضلع الانتهاء للزاوية °240 في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$	أوجد قياس الزاوية المرجعية
$= 240° - 180° = 60°$	$\theta = 240°$
$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$	دالّة جيب التمام سالبة في الربع الثالث

(b $\csc \frac{5\pi}{6}$



يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.

$\theta' = \pi - \theta$	أوجد قياس الزاوية المرجعية
$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{5\pi}{6}$
$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$	دالّة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني
$= \csc 30°$	$\frac{\pi}{6}\text{ rad} = 30°$
$= 2$	$\csc 30° = \frac{1}{\sin 30°}$

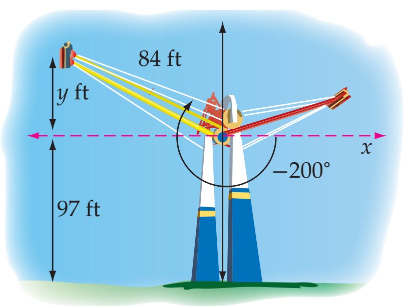
تحقق من فهمك

(4A $\cos 135°$

(4B $\tan \frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدوالّ المثلَّثية

أراجيح: إذا كان طول كلِّ ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft، فأوجد الارتفاع الكليَّ لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضَّح في الشكل.



قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية °200− :

$-200° + 360° = 160°$

$180° - 160° = 20°$	قياس الزاوية المرجعية
$\sin \theta = \frac{y}{r}$	دالّة الجيب
$\sin 20° = \frac{y}{84}$	$\theta = 20°, r = 84$
$84 \sin 20° = y$	اضرب كل من الطرفين في 84
$28.7 \approx y$	استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y

بما أن y تساوي 28.7 ft تقريبًا، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو 28.7 + 97 ويساوي 125.7 ft تقريبًا.

الربط بالحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوّارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

تحقق من فهمك

(5 **أراجيح:** أوجد الارتفاع الكليّ لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذه الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft، وقياس زاوية الدوران °195−

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تأكد

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ :

1) $(1, 2)$
2) $(-8, -15)$
3) $(0, -4)$

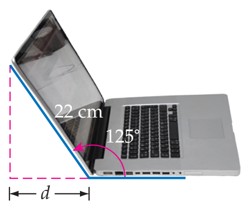
مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

4) $300°$
5) $115°$
6) $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي:

7) $\sin \frac{3\pi}{4}$
8) $\tan \frac{5\pi}{3}$
9) $\sec 120°$
10) $\sin 300°$

مثال 5
11) **تقنية:** فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm، فشكّل زاوية قياسها °125 كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.



a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثيِّ بحيث تكون الزاوية °125 مرسومة في الوضع القياسي.

b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية °125 ، ثم اكتب دالّة مثلَّثية يمكن استعمالها في إيجاد d.

c) استعمل هذه الدالّة، لإيجاد قيمة d، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

12) $(5, 12)$
13) $(-6, 8)$
14) $(3, 0)$
15) $(0, -7)$
16) $(4, -2)$
17) $(-9, -3)$

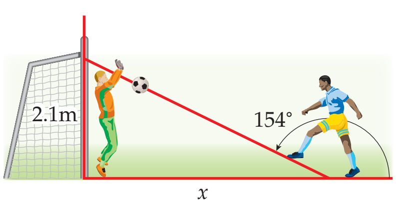
مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

18) $195°$
19) $285°$
20) $-250°$
21) $\frac{7\pi}{4}$
22) $-\frac{\pi}{4}$
23) $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي:

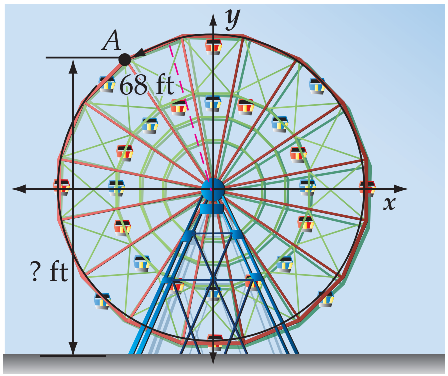
24) $\sin 210°$
25) $\tan 315°$
26) $\cos 150°$
27) $\csc 225°$
28) $\sin \frac{4\pi}{3}$
29) $\cos \frac{5\pi}{3}$
30) $\cot \frac{5\pi}{4}$
31) $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5
32) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ الكرةَ نحو الهدف من مسافة x m عن حارس المرمى كما هو مبيَّن في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.



a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية °154. ثم اكتب دالّة مثلَّثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟



33) **عجلات دوّارة:** في إحدى مدن الألعاب عجلة دوّارة طول نصف قطرها 68 ft، وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها $202.5°$ عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟

افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أُعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوالّ المثلَّثية للزاوية θ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الخمس الأخرى للزاوية θ.

34) $\sin \theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

35) $\tan \theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

36) $\cos \theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

37) $\cot \theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي:

38) $\cot 270°$

39) $\csc 180°$

40) $\sin 570°$

41) $\tan \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

42) $\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

43) $\cot \frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **تحدٍّ:** الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث $\tan \theta = -1, \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساويًا لِـ $225°$؟ وضِّح إجابتك.

45) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة: $3 \sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم غير صحيحة. وضِّح إجابتك.

46) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$.

47) **اكتب:** وضِّح خطوات إيجاد قيمة دالّة مثلَّثية لزاوية قياسها أكبر من $90°$. مضمِّنًا ذلك وصفًا للزاوية المرجعية في هذه الخطوات.

تدريب على اختبار

48) إذا كان مجموع عددين 21، والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟

49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + \boldsymbol{i})^2$؟

A $-12\boldsymbol{i}$

B $36 - 12\boldsymbol{i}$

C $36 - \boldsymbol{i}$

D $35 - 12\boldsymbol{i}$

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كلِّ زاوية مكتوبة بالراديان فيما يأتي إلى الدرجات: (الدرس 8-2)

50) $\frac{4}{3}\pi$

51) $\frac{11}{6}\pi$

52) $-\frac{17}{4}\pi$

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادّة: (الدرس 8-1)

53) $\cos A = \frac{13}{17}$

54) $\sin 30° = \frac{b}{6}$

55) $\tan C = \frac{9}{4}$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

56) $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$

57) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$

58) $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

8-4 قانون الجيوب
Law of Sines

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها. الدرس (8-1)

والآن:

- أجد مساحة مثلّث باستعمال طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حلِّ المثلّثات.

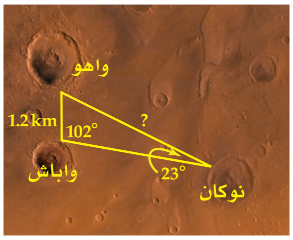
المفردات:

قانون الجيوب
Law of Sines

حل المثلّث
solving a triangle

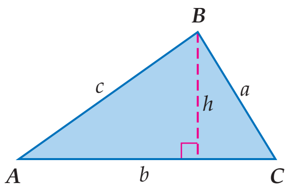
لماذا؟

يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوّهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلّفي قصص علمية خيالية. والشكل المجاور يبيِّن ثلاثًا من هذه الفوّهات. يمكنك استعمال حساب المثلّثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو ونوكان.



إيجاد مساحة المثلّث: في المثلّث المجاور

$\sin A = \frac{h}{c}$ أي أنَّ $h = c \sin A$.



المساحة $= \frac{1}{2} bh$ صيغة مساحة المثلّث

المساحة $= \frac{1}{2} b(c \sin A)$ عوِّض عن h بِـ $c \sin A$

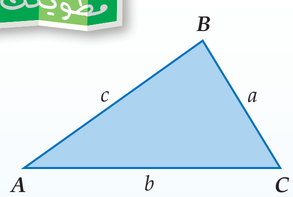
المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$ بسّط

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلّث، إذا كان معلومًا لديك طولا أيِّ ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مفهوم أساسي — مساحة المثلّث

أضف إلى مطويتك

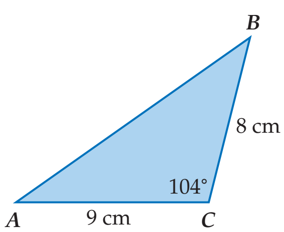
التعبير اللفظي: مساحة المثلّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.



الرموز: $k = \frac{1}{2} bc \sin A$ ، $k = \frac{1}{2} ac \sin B$ ، $k = \frac{1}{2} ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلّث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104°$.

$k = \frac{1}{2} ab \sin C$ صيغة مساحة المثلّث

$= \frac{1}{2} (8)(9) \sin 104°$ عوِّض

≈ 34.9 بسّط

إذن المساحة تساوي $34.9\, cm^2$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°$, $b = 18\,m$, $c = 22\,m$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلَّث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبيِّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلَّث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$ اكتب صيغ مساحة المثلَّث الثلاث المتساوية

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$ اضرب كلَّ عبارة في 2

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$ اقسم كلَّ عبارة على abc

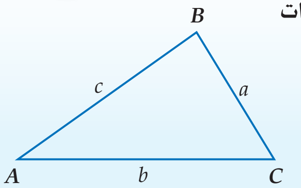
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ بسِّط

مفهوم أساسي — قانون الجيوب

أضف إلى مطويتك

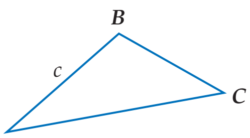
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

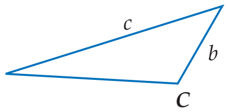


حَلُّ المثلَّث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلَّث وقياس زواياه.

ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّث في الحالات الآتية:



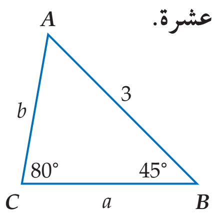
- معرَّفة قياسي زاويتين في المثلَّث وطول أي ضلع فيه (زاوية – زاوية– ضلع (حالة AAS)، أو زاوية– ضلع– زاوية (حالة ASA))



- معرَّفة طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (ضلع– ضلع– زاوية (حالة SSA))

مثال 2 حَلُّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

حُلَّ $\triangle ABC$، الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180° - (80° + 45°) = 55°$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كلٍّ من الطولين: a, b . اكتب معادلة لإيجاد قيمة كلٍّ منهما.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الجيوب	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$	عوِّض	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$
$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$	حُلَّ بالنسبة لكلِّ متغيِّر	$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$
$a \approx 2.5$	استعمل الآلة الحاسبة	$b \approx 2.2$

إذن، $A = 55°, a \approx 2.5, b \approx 2.2$.

إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقتين الآتيتين لحلِّ المثلَّث في المثال 2

$$\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

تحقق من فهمك

2) حُلَّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42°, Q = 65°, n = 5$، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

إذا عُلِمَ لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلَّث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلَّثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلَّث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

إرشادات للدراسة

الحالة المبهمة
الحالة التي يكون للمثلَّث فيها حلان تُسمَّى الحالة المبهمة.

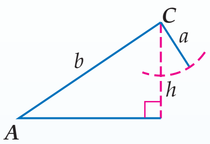
مفهوم أساسي

المثلَّثات الممكنة في حالة (SSA)

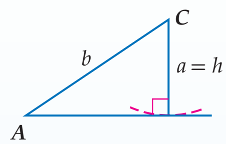
أضف إلى مطويتك

افترض مثلَّثا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

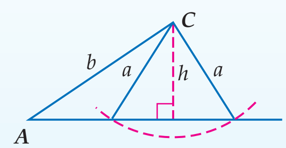
$\angle A$ حادّة



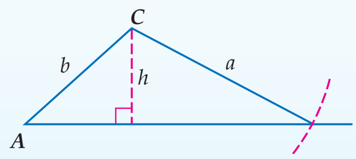
$a < h$
لا يوجد حلٌّ



$a = h$
حلٌّ واحد

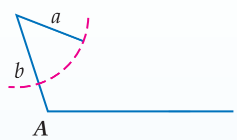


$h < a < b$
حلَّان

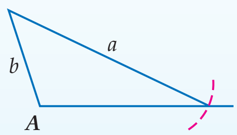


$a \geq b$
حلٌّ واحد

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$a \leq b$
لا يوجد حلّ



$a > b$
حلٌّ واحد

إرشادات للدراسة

الزاوية A حادّة
في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة. الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بعد من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادّة.

$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

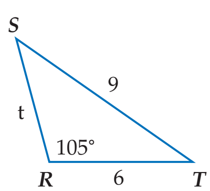
$\sin A = \frac{h}{b}$

بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلَّثات الحادّة الزوايا.

مثال 3 حَلُّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدِّد إن كان لكلِّ مثلَّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105°, r = 9, s = 6$.



بما أن $\angle R$ منفرجة، و $9 > 6$ ، نستنتج أن للمثلَّث حلًّا واحدًا.

الخطوة 1: ابدأ برسم المثلَّث، ثم استعمل قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.

$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الجيوب

$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$ حُلَّ بالنسبة لـِ $\sin S$

$\sin S \approx 0.6440$ استعمل الآلة الحاسبة

$S \approx 40°$ أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$، والزاوية S حادّة

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$.

$m\angle T \approx 180° - (105° + 40°) \approx 35°$

الخطوة 3: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة t.

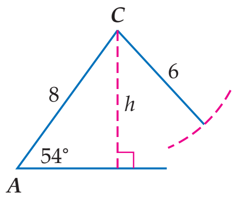
$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الجيوب

$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$ حُلَّ بالنسبة لـ t

$t \approx 5.3$ استعمل الآلة الحاسبة

إذن: $S \approx 40°, T \approx 35°, t \approx 5.3$.

b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54°, a = 6, b = 8$.



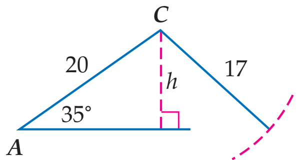
بما أن $\angle A$ حادّة، و $8 > 6$، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a.

$h = b \sin A = 8 \sin 54°$ $b = 8, A = 54°$

≈ 6.5 استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $6 < 6.5$ أو $a < h$ فلا يوجد للمثلّث حلّ.

c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35°, a = 17, b = 20$.



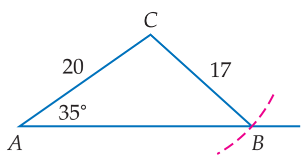
بما أن $\angle A$ حادّة، و $20 > 17$، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a.

$h = b \sin A = 20 \sin 35°$ $b = 20, A = 35°$

≈ 11.5 استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $11.5 < 17 < 20$ أو $h < a < b$. فإن للمثلّث حلّين، وبالتالي هناك مثلّثان يطلب حلّهما.

الحالة 1: $\angle B$ حادّة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الجيوب

$\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$ حُلّ بالنسبة لِـ $\sin B$

$\sin B \approx 0.6748$ استعمل الآلة الحاسبة

$B \approx 42°$ أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6748$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (35° + 42°) \approx 103°$

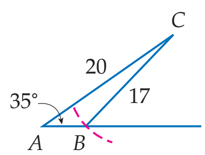
الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 103°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ حُلّ بالنسبة لِـ c

$c \approx 28.9$ استعمل الآلة الحاسبة

الحالة 2: $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42° \approx 138°$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (35° + 138°) \approx 7°$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 7°}{\sin 35°}$ حُلّ بالنسبة لِـ c

$c \approx 3.6$ استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن أحد الحلّين هو: $B \approx 42°, C \approx 103°, c \approx 28.9$، والحلّ الثاني هو: $B \approx 138°, C \approx 7°, c \approx 3.6$.

تحقق من فهمك

حدِّد إن كان لكل مثلّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95°, r = 10, s = 12$

3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32°, n = 7, p = 4$

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47°, a = 15, b = 18$

إرشادات للدراسة

حلّان

في الفرع C، بما أن $h < a < b$ فإن للمثلَّث حلّين أحدهما عندما تكون الزاوية B حادّة، والآخر عندما تكون الزاوية B منفرجة (مكمّلة للزاوية الحادّة في الحلّ الأول).

إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية

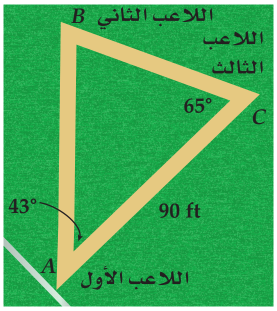
في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها $42°$ لإيجاد القياس الآخر للزاوية B .

الربط بالحياة

يقع إستاد الملك فهد الدولي بالجهة الشمالية الشرقية من مدينة الرياض على مساحة إجمالية تبلغ 500 000 متر مربع ، ويتكون من مبنى اللاعبين وملعب كرة القدم العشبي وملحقاته الخدمية ومضمار للجري ولألعاب القوى وقناة الحماية والمدرجات ومقاعد الجمهور .

المصدر : الهيئة العامة للرياضة

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال قانون الجيوب لحل مسألة



كرة قدم: يُمثّل الشكل المجاور إحدى التمريرات الحاسمة بين ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 72°$	مجموع زوايا المثلَّث °180
$\dfrac{\sin 72°}{90} = \dfrac{\sin 43°}{x}$	قانون الجيوب
$x \sin 72° = 90 \sin 43°$	استعمل الضرب التبادلي
$x = \dfrac{90 \sin 43°}{\sin 72°}$	حُلَّ بالنسبة لـ x
$x \approx 64.5$	استعمل الآلة الحاسبة

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 ft تقريبًا.

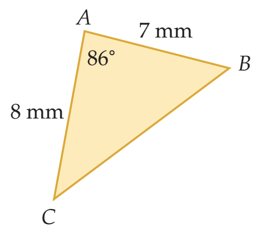
تحقق من فهمك

4) **كرة قدم:** أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني في الشكل أعلاه.

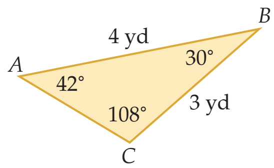
تأكد

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

1)



2)

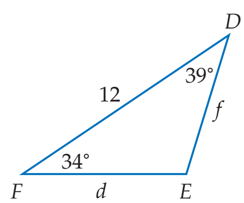


3) $A = 40°, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

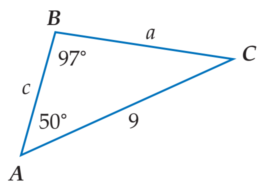
4) $B = 103°, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلَّث مما يأتي، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

5)



6)



7) $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80°, H = 40°, g = 14$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

8) $A = 95°, a = 19, b = 12$

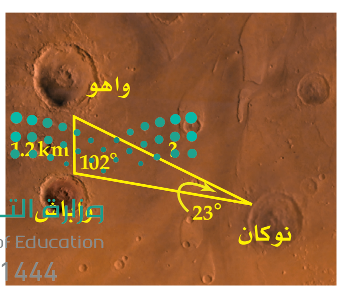
9) $A = 60°, a = 15, b = 24$

10) $A = 34°, a = 8, b = 13$

11) $A = 30°, a = 3, b = 6$

مثال 4

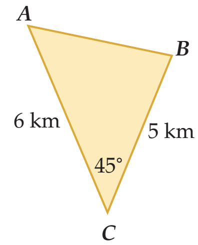
12) **فضاء:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوّهة واهو وفوّهة نوكان.



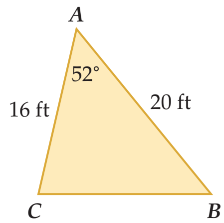
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد مساحة كلٍّ من المثلَّثات الموضَّحة في الأشكال الآتية مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة:

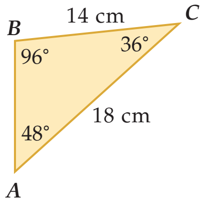
(13



(14



(15



(16 $C = 25°, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$

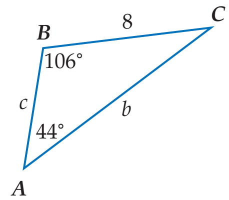
(17 $A = 138°, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$

(18 $B = 92°, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

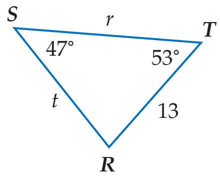
(19 $C = 116°, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلَّث ممّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

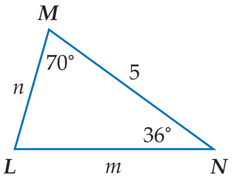
(20



(21



(22



(23 $\triangle HJK$ الذي فيه: $H = 53°\,,\ J = 20°\,,\ h = 31$.

(24 $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 109°\,,\ Q = 57°\,,\ n = 22$.

(25 $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 50°\,,\ a = 2.5\,,\ C = 67°$.

(26 $\triangle ABC$ الذي فيه: $B = 18°\,,\ C = 142°\,,\ b = 20$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(27 $A = 100°, a = 7, b = 3$

(28 $A = 75°, a = 14, b = 11$

(29 $A = 38°, a = 21, b = 18$

(30 $A = 52°, a = 9, b = 20$

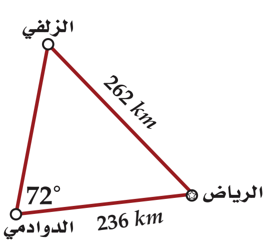
(31 $A = 42°, a = 5, b = 6$

(32 $A = 44°, a = 14, b = 19$

(33 $A = 131°, a = 15, b = 32$

(34 $A = 30°, a = 17, b = 34$

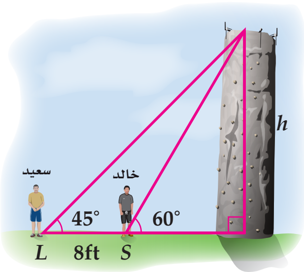
مثال 4 **جغرافيا:** في الشكل المجاور ثلاثة مواقع جغرافية تشكِّل مثلَّثًا. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوادمي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km ، وقياس الزاوية عند الدوادمي °72 ، فأجب عما يأتي:



(35 أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض.

(36 أوجد المسافة بين الزلفي والدوادمي.

37) **تسلُّق:** يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلُّق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبيّن في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟



مسائل مهارات التفكير العليا

38) **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $R = 56°, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

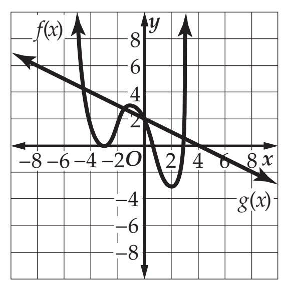
رضوان	علي
$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$ $\sin T \approx 0.4145$ $T \approx 24.5°$	بما أن $t > r$ فلا يوجد للمثلّث حل.

39) **تبرير:** أوجد أطوال أضلاع مثلّثين مختلفين ABC، بحيث يكون في كلٍّ منها $A = 55°$، $C = 20°$.

40) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $R = 62°$, $d = 38$، فأوجد قيمة لِـ r، بحيث لا يوجد للمثلّث DRF حلّ عندها . ووضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

41) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x)$, $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



42) إذا كان أحد أصفار الدالّة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4. فأيٌّ مما يأتي يُمثّل تحليلًا للعبارة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

A $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$

B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$

C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$

D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\sin 210°$ 44) $\cos \frac{3}{4}\pi$ 45) $\cot 60°$

في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية مُعطاة: (الدرس 2-8)

46) $125°$ 47) $-32°$ 48) $\frac{2}{3}\pi$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (مهارة سابقة)

49) $64 + 48 + 36 + \ldots$ 50) $27 + 36 + 48 + \ldots$ 51) $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n$

إذا كانت $w = 6, x = -4, y = 1.5, z = \frac{3}{4}$، فأوجد قيمة كلِّ عبارة ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

52) $w^2 + y^2 - 6xz$ 53) $x^2 + z^2 + 5wy$ 54) $wy + xz + w^2 - x^2$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

توسع

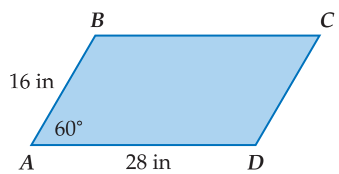
8-4 معمل الهندسة
مساحة متوازي الأضلاع
Area of Parallelogram

الهدف أستعمل نسبة الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

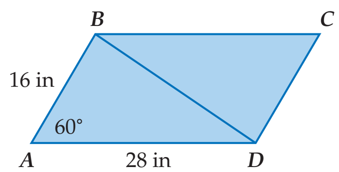
يمكنك إيجاد مساحة أيّ مثلَّث باستعمال الجيب. وكذلك يمكنك استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



الخطوة 1: ارسم القطر $\overline{BD}$.



يقسم القطر $\overline{BD}$ متوازي الأضلاع إلى مثلَّثين متطابقين هما: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

الخطوة 2: أوجد مساحة $\triangle ABD$.

$K = \frac{1}{2}(AB)(AD) \sin A$ صيغة مساحة المثلَّث

$= \frac{1}{2}(16)(28) \sin 60°$ $AB = 16, AD = 28, A = 60°$

$= 224\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اضرب وعوِّض قيمة $\sin 60°$

$= 112\sqrt{3}$ بسِّط

الخطوة 3: أوجد مساحة $\square ABCD$.

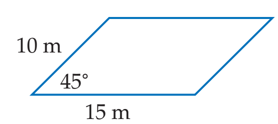
مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتَي المثلَّثين: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

وبما أن $\triangle CDB \cong \triangle ABD$ ، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$.

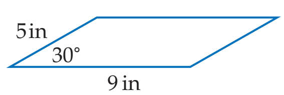
لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلَي مساحة $\triangle ABD$. أي $2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98 \text{ in}^2$

تمارين:

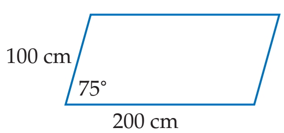
(1



(2



(3



أوجد كلًّا ممّا يأتي لكلِّ متوازي أضلاع أعلاه:

a) المساحة.

b) المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.

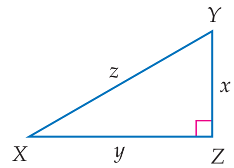
c) المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-8 إلى 4-8

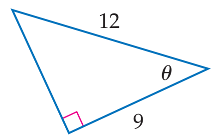
حُلّ $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين: 1, 2 وفق القياسات المُعطاة، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



1) $Y = 65°, x = 16$

2) $X = 25°, x = 8$

3) أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ



4) ارسم زاوية قياسها $-80°$ في الوضع القياسي.

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

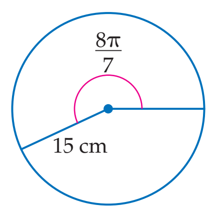
5) $215°$

6) $-350°$

7) $\frac{8\pi}{5}$

8) $\frac{9\pi}{2}$

9) **اختيار من متعدد:** طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة يساوي:



A 4.2 cm

B 17.1 cm

C 53.9 cm

D 2638.9 cm

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من الدالّتين المثلَّثيتين فيما يأتي:

10) $\tan \pi$

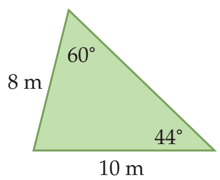
11) $\cos \frac{3\pi}{4}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقطتين الآتيتين في كلِّ مرَّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ:

12) $(0, -5)$

13) $(6, 8)$

14) **حديقة:** عند فيصل حديقة مثلَّثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحديقة؟



حدّد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

15) $A = 38°, a = 18, c = 25$

16) $A = 65°, a = 5, b = 7$

17) $A = 115°, a = 12, b = 8$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

18) $240°$

19) $\frac{9\pi}{4}$

20) $-\frac{\pi}{4}$

21) **اختيار من متعدد:** افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أيِّ ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ؟

A الربع الأول أو الثاني

B الربع الأول أو الثالث

C الربع الثاني أو الثالث

D الربع الأول أو الرابع

8-5 قانون جيوب التمام
Law of Cosines

فيما سبق:

درست حلّ مثلَّثات باستعمال قانون الجيوب. الدرس (4-8)

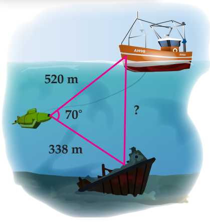
والآن:

- أستعمل قانون جيوب التمام لحلِّ مثلَّثات.
- أختار طرقًا مناسبة لحلِّ مثلَّثات.

المفردات:

قانون جيوب التمام
Law of Cosines

لماذا؟



الغوَّاصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بُعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءًا إلى حطام سفينة أخرى على بُعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلَّثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

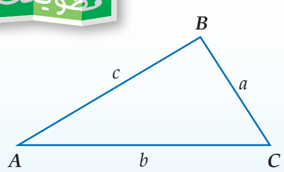
استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلَّثات: لا يمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلَّث مثل المثلَّث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيوب التمام** لحل المثلَّث في الحالتين الآتيتين:

- معرِّفة طولي ضلعين في المثلَّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع – زاوية – ضلع (حالة SAS))
- معرِّفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلَّث (ضلع – ضلع – ضلع (حالة SSS))

مفهوم أساسي: قانون جيوب التمام

أضف إلى مطويتك

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

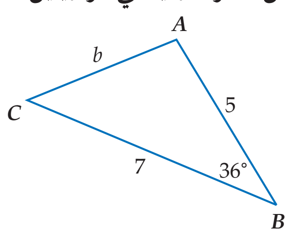
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ستبرهن هذه الصيغة في السؤال (31)

مثال 1 حَلُّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	قانون جيوب التمام
$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$	$a = 7, c = 5, B = 36°$
$b^2 \approx 17.4$	استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط
$b \approx 4.2$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة 2: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية A.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون جيوب التمام
$7^2 = (4.2)^2 + 5^2 - 2(4.2)(5) \cos A$	$a = 7, b = 4.2, c = 5$
$7^2 - (4.2)^2 - 5^2 = -2(4.2)(5) \cos A$	اطرح $(4.2)^2$ و 5^2 من كلا الطرفين
$\dfrac{7^2 - (4.2)^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$	اقسم كلًّا من الطرفين على $-2(4.2)(5)$
$-0.1514 \approx \cos A$	استعمل الآلة الحاسبة
$99° \approx A$	أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.1514$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180° - (36° + 99°) \approx 45°$$

إذن: $b \approx 4.2, A \approx 99°, C \approx 45°$

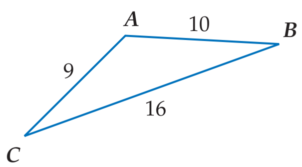
تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle FGH$ الموضَّح في الشكل المجاور الذي فيه: $G = 82°, f = 6, h = 4$ مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلَّث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحلِّ هي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلَّث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادَّتان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.

مثال 2 حل مثلّث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون جيوب التمام
$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$	$a = 16, b = 9, c = 10$
$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$	اطرح 9^2 و 10^2 من كلا الطرفين
$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$	اقسم كلًا من الطرفين على $-2(9)(10)$
$-0.4167 \approx \cos A$	استعمل الآلة الحاسبة
$115° \approx A$	أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.4167$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115°}{16}$	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
$\sin B \approx \frac{9 \sin 115°}{16}$	اضرب كل من الطرفين في 9
$\sin B \approx 0.5098$	استعمل الآلة الحاسبة
$B \approx 31°$	أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.5098$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180° - (115° + 31°) \approx 34°$$

إذن: $A \approx 115°, B \approx 31°, C \approx 34°$.

تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب

يمكن أن يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلّث مجموع قياسات زواياه $181°$.

اختيار الطريقة المناسبة لحلِّ المثلّثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلّثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقلّ إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسَي أيٍّ عنصرين آخرين من عناصر المثلَّث. وإذا كان للمثلّث حلّ، فيجب أن تُقرّر ما إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحلّه.

ملخّص المفهوم

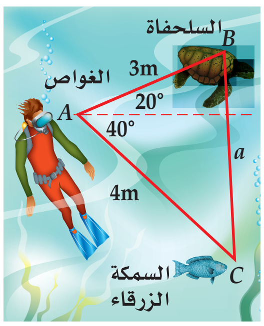
حَلُّ المثلَّثات غير القائمة الزاوية

أضف إلى مطويتك

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيٍّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال قانون جيوب التمام

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها °20 ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها °40 فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



افهم: تعرف قياسَي الزاويتين المتكوِّنتين من نظر الغوّاص إلى أعلى وإلى أسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغوّاص وكلٍّ من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثِّل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلَّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المسألة.

حُلّ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ — قانون جيوب التمام

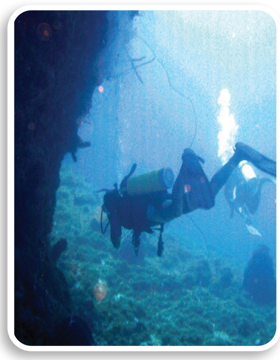
$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 60°$ — $b = 4, c = 3, A = 60°$

$a^2 = 13$ — استعمل الآلة الحاسبة

$a \approx 3.6$ — أوجد قيمة a الموجبة

إذن المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6 m تقريبًا.

تحقق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أنَّ: $B \approx 74°, C \approx 46°$.
بما أن $c < a < b$ ، $C < A < B$، فإن الحلَّ منطقي.



الربط بالحياة

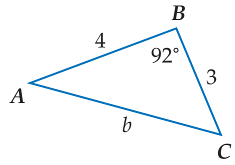
الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غوَّاص هو 318.2 m .

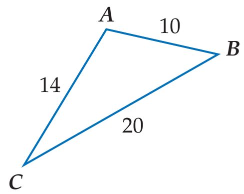
تحقق من فهمك

3) **ماراثون:** ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها °79 ، وركض مسافة 7 km . ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟

تأكد

المثالان 1, 2 حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

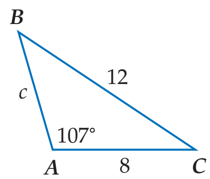
(1


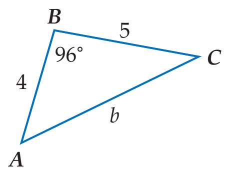
(2


(3 $a = 5, b = 8, c = 12$

(4 $B = 110°, a = 6, c = 3$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلَّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(5


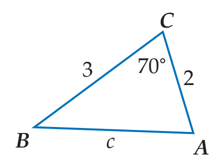
(6


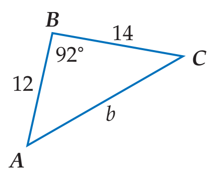
(7 $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35°, s = 16, t = 9$.

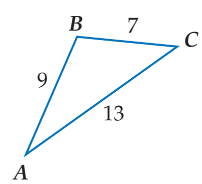
(8 **كرة قدم:** في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خطّ الوسط بزاوية قياسها 40° ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟

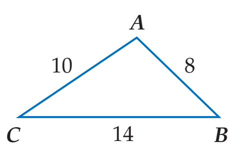
تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 2 حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(9


(10


(11


(12


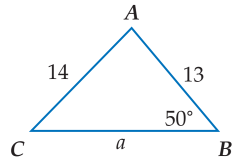
(13 $A = 116°, b = 5, c = 3$

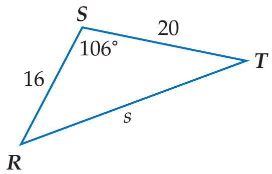
(14 $C = 80°, a = 9, b = 2$

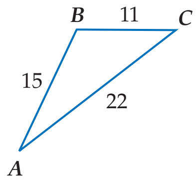
(15 $f = 10, g = 11, h = 4$

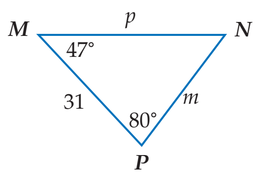
(16 $w = 20, x = 13, y = 12$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلَّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(17


(18


(19


(20


(21 $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84°, c = 7, a = 2$.

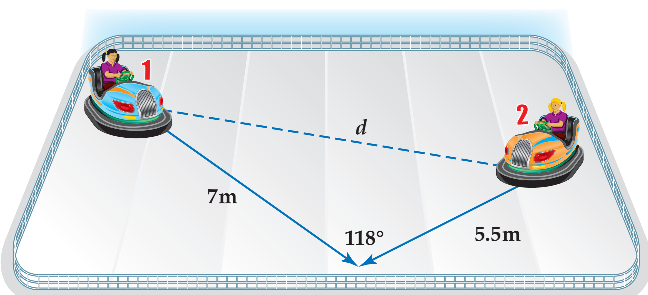
(22 $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$.

(23 **استكشاف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

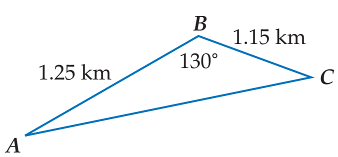
(24 **سباق:** ميدان للسباق على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه $1.8\,km, 2\,km, 1.2\,km$. أوجد قياس كلِّ زاوية من زواياه.

(25 **أرض:** قطعة أرض على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه $140\,m, 210\,m, 300\,m$. استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقرّبةً إلى أقرب متر مربع.

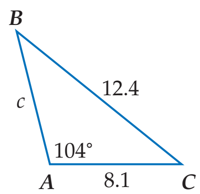
(26 **ألعاب سيارات:** في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبيَّن في الشكل أدناه، ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟

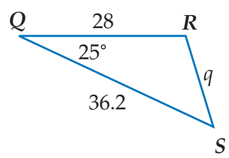


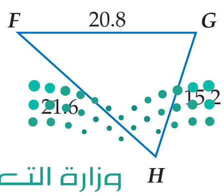
(27 **رياضة مائية:** يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهابًا وإيابًا، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

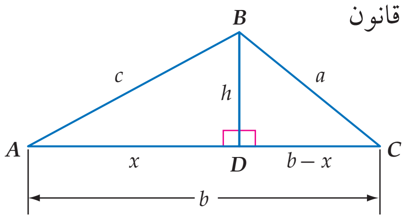
(28


(29


(30


مسائل مهارات التفكير العليا

31) **برهان:** استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون جيوب التمام، مستعملًا الإرشادات الآتية:



أولًا: طبِّق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.

ثانيًا: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.

- $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

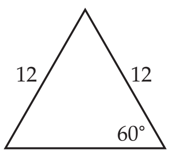
32) **تبرير:** مثلَّث أطوال أضلاعه $10.6\,\text{cm}, 8\,\text{cm}, 14.5\,\text{cm}$. وضِّح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدها مقرَّبة إلى أقرب درجة.

33) **اكتب:** قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلَّث بتلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيوب التمام.

تدريب على اختبار

34) **إجابة قصيرة:** حُلَّ المعادلة: $\frac{23}{6x} = \frac{5}{8} + \frac{1}{x-1}$

35) **هندسة:** محيط الشكل المجاور يساوي:



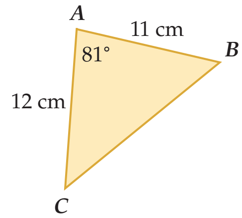
A 24 **C** 36

B 30 **D** 48

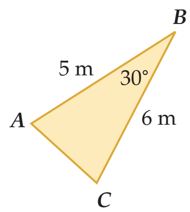
مراجعة تراكمية

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس 8-4)

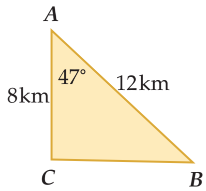
36)



37)



38)



39) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(6, -9)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ. (الدرس 8-3)

ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسيّ، ثم أوجد الزاوية المرجعيّة لكلٍّ منها. (الدرس 8-3)

40) $-15°$

41) $\frac{5}{4}\pi$

42) $245°$

8-6 الدوالّ الدائرية
Circular Functions

فيما سبق:

درست إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية. الدرس (3-8)

والآن:

- أجد قيم دوالّ مثلَّثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- أستعمل خواصّ الدوالّ الدورية في إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية.

المفردات:

دائرة الوحدة
unit circle

الدالّة الدائرية
circular function

الدالّة الدورية
periodic function

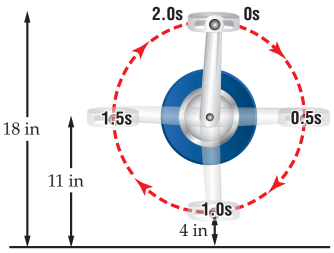
الدورة
cycle

طول الدورة
period

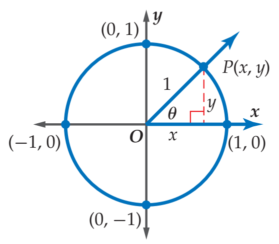
لماذا؟

عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدّال في أثناء دورانه يمثِّل دالّة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.

لاحظ أن البدّال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كلَّ ثانيتين.



الدوالّ الدائرية: **دائرة الوحدة** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالَّتَي: الجيب وجيب التمام.



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

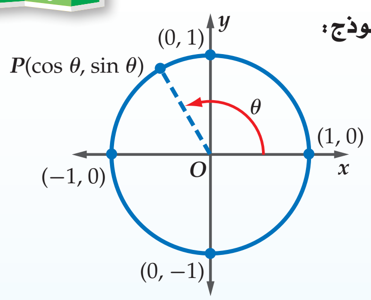
وبذلك فإن قيمة $\cos\theta$ هي الإحداثي x، وقيمة $\sin\theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي — دوالّ في دائرة الوحدة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن: $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

النموذج:



الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن:
$P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

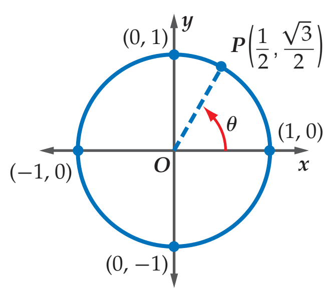
كلٌّ من $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ دالّة بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كلٌّ منهما **دالّة دائرية**؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1 إيجاد قيمة الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$.

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



تحقق من فهمك

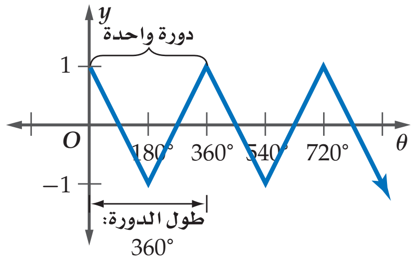
1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$.

إرشادات للدراسة

الدوالّ الدائرية

بما أن طول القوس المقابل للزاوية التي قياسها θ يساوي $r\theta$، فإنه يمكن التعبير عن مجال الدالّة المثلَّثية بطول القوس المقابل للزاوية بدلًا من قياسها، وعندئذ تسمى دالّة دائرية.

الدوالّ الدورية: في **الدوالّ الدورية** يكون شكل الدالّة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبيّن في التمثيل البياني للدالّة أدناه.



θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تكرار الدورة كل 360°

إرشادات للدراسة

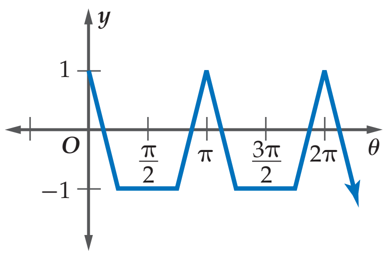
الدورات

يمكن أن تبدأ الدورة عند أيّ نقطة في منحنى الدالّة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$، ويكون طول الدورة هو:

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

مثال 2 إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.

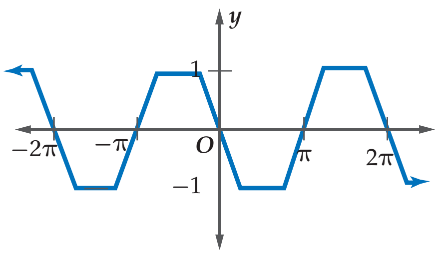


يبدأ تكرار النمط عند ... ,π, 2π،

ولذلك طول الدورة هو π.

تحقق من فهمك

2) أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



دوران العجلة والبدّال في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوّارة، والعديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تُمثّل دوالّ دورية.

الربط بالحياة

أغلب متسابقي الدرّاجات الهوائية يديرون البدّالات بمعدّلات تزيد على 200 دورة/دقيقة. أما غالبية الناس الذي يركبون دراجات هوائية فيديرونها بمعدّلات تتراوح بين 90-120 دورة/دقيقة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال الدوالّ الدوريّة

درّاجات هوائية: عُدْ إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البدّال في الدرّاجة الهوائية بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:

a) أنشئ جدولًا يوضّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية:
0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 , 2.5, 3

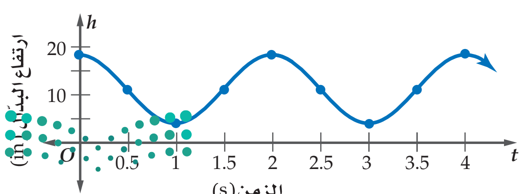
الزمن (s)	الارتفاع (in)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

عند 0s يكون الارتفاع 18 in. وعند 0.5s، يكون الارتفاع 11 in، وعند 1s يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

b) أوجد طول دورة الدالّة.

طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.

c) مثّل الدالّة بيانيًّا. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h.



أقصى ارتفاع يصله البدّال هو 18 in. وأقلّ ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتان، لذا فإن النمط يتكرَّر كلَّ ثانيتين.

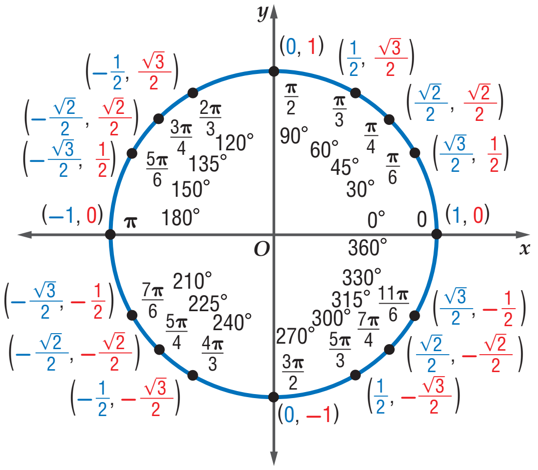
تحقق من فهمك

3) **درّاجات هوائية** افترض أن البدّال للدرّاجة الهوائية المحدَّدة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدَّل دورة واحدة لكل ثانية.

A) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

B) أوجد طول دورة الدالّة ومثِّلها بيانيًّا.

يبيِّن الشكل المجاور القيم الدقيقة لكلٍّ من $\cos\theta, \sin\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثِّل الإحداثي x قيمة $\cos\theta$، ويمثِّل الإحداثي y قيمة $\sin\theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.



يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالّتين: $\cos\theta, \sin\theta$ بيانيًّا، حيث يمثِّل المحور الأفقي قيم θ. والمحور الرأسي قيم الدالّة المطلوبة.

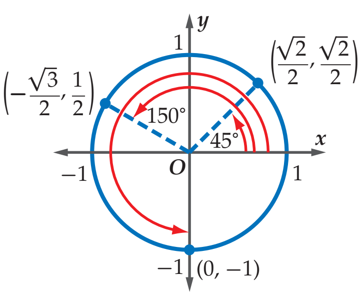
إرشادات للدراسة

الراديان

عند تمثيل دالّتي الجيب وجيب التمام يمكن تدريج المحور θ بالراديان.

تتكرَّر دورة كلٍّ من دالّتَي الجيب وجيب التمام كل $360°$. وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كلٍّ منهما $360°$ أو 2π.

إذا كانت النقاط المبيّنة في الشكل تمثِّل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45°, \theta = 150°, \theta = 270°$.

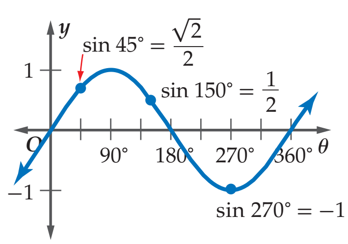


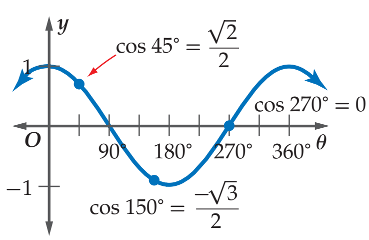
$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $\sin\theta, \cos\theta$ كما يأتي:





بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين هو °360، فإن قيم كلٍّ من الدالّتين تتكرّر كلَّ °360.
لذلك فإن $\sin(x + 360°) = \sin x$, $\cos(x + 360°) = \cos x$

مثال 4 حساب قيم الدوالّ المثلَّثية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممّا يأتي:

a) $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos(120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b) $\sin \frac{11\pi}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك

4A) $\sin 420°$

4B) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

تأكـد

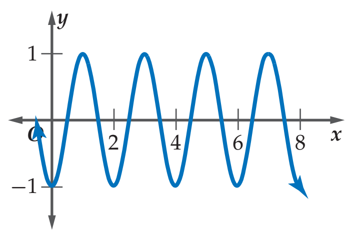
مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

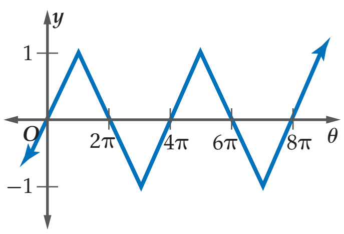
2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

3)



4)



مثال 3 **5)** **أرجوحة:** إذا مثّل ارتفاع أرجوحة دالّة دوريّة في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو 2m ، ثم تعود إيابًا لتصل 2m مرّة أخرى مرورًا بأقلِّ ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}$m ، مستغرقة زمنًا قدره ثانية واحدة بين أقلّ ارتفاع وأقصى ارتفاع، فأجب عما يأتي:

a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهابًا وإيابًا بدءًا بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟

b) مثّل بيانيًّا ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالّة في الزمن t.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممّا يأتي:

6) $\sin\frac{13\pi}{6}$

7) $\sin(-60°)$

8) $\cos 540°$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

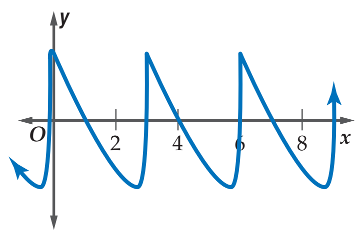
10) $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

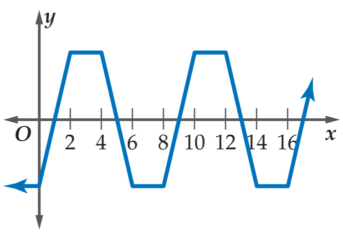
12) $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية:

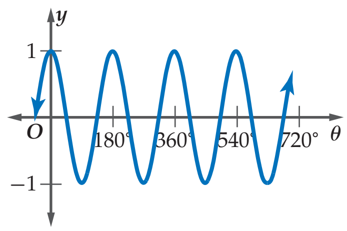
13)



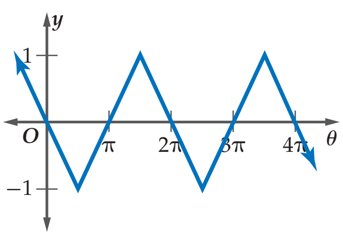
14)



15)



16)

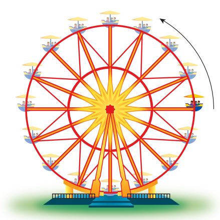


مثال 3 17) **العجلة الدّوارة:** يبيِّن الشكل المجاور موقع مقعد راكب y بالأقدام عن مركز العجلة بعد t ثانية. إذا تغيَّر ارتفاع المقعد y في العجلة بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:

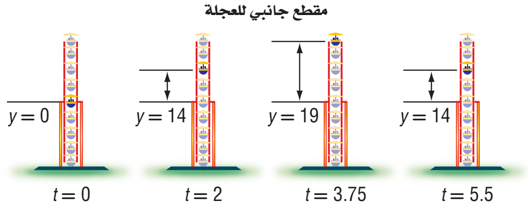
a) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع المقعد y عند الثواني الآتية: $0, 2, 3.75, 5.5, 7.5, 9.5,$ $11.25, 13, 15.5$

b) أوجد طول دورة الدالّة.

c) مثِّل الدالّة بيانيًّا. افترض أنَّ المحور الأفقي يمثِّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثِّل الارتفاع y.



مقطع جانبي للعجلة



مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممَّا يأتي:

18) $\sin\frac{7\pi}{3}$

19) $\cos(-60°)$

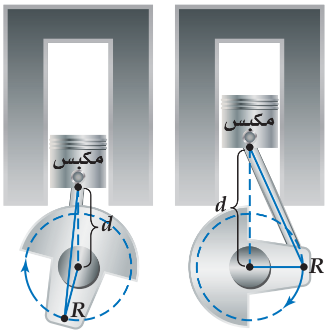
20) $\cos 450°$

21) $\sin\frac{11\pi}{4}$

22) $\sin(-45°)$

23) $\cos 570°$

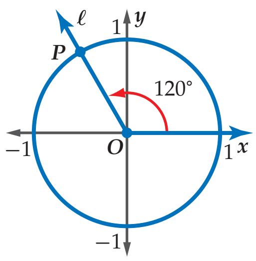
24) **محرِّكات:** في المحرِّك المجاور، تمثِّل (d) المسافةَ من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمّى ناقل الحركة (الكرنك)، وتشكِّل دالّةً في الزمن. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) أوجد طول الدورة بالثواني.

b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm، وأكبر قيمة 7 cm، فمثّل منحنى الدالّة بيانيًّا، معتبرًا أن المحور الأفقي يمثّل الزمن t ، والمحور الرأسي يمثّل المسافة d .

25) **تمثيلات متعدِّدة:** يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يبيِّن الشكل المجاور.



a) **هندسيًّا:** انسخ الشكل في دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها $30°, 60°, 150°, 210°, 315°$ في الوضع القياسي.

b) **جدوليًّا:** أنشئ جدولًا للقيم يوضِّح ميل كلِّ ضلع انتهاء، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظلِّ الزاوية والميل؟ وضِّح إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي:

26) $\cos 45° - \cos 30°$

27) $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

28) $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

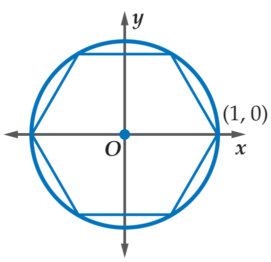
29) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

30) $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

31) $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **هندسة:** رُسِم سداسي منتظم داخل دائرة وحدة مركزها نقطة الأصل، بحيث تقع رؤوسه جميعها على الدائرة كما في الشكل المجاور. إذا كانت إحداثيات أحد رؤوس السداسي (1 , 0)، فما إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى من السداسي؟



33) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من خالد ونواف بحساب قيمة المقدار $\cos \frac{-\pi}{3}$. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

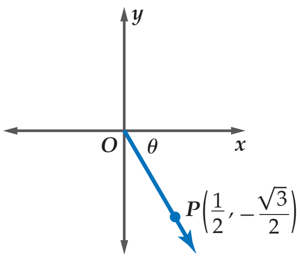
خالد

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نواف

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{5\pi}{3} = 0.5$$

34) تحدٍّ: إذا بدأ نصف المستقيم الموضَّح في الشكل المجاور من نقطة الأصل مارًّا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x .



35) تبرير: حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.
" طول دورة دالّة الجيب من مضاعفات π "

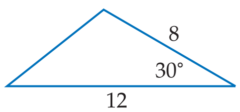
36) اكتب: وضِّح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالّة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالّة. ضمّن في توضيحك وصفًا للدورة.

تدريب على اختبار

37) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

A 5   B 13   C 31   D 161

38) هندسة: مساحة المثلَّث الموضَّح في الشكل المجاور تساوي:

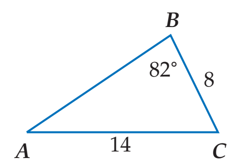


A 48   B 96   C 41.6   D 24

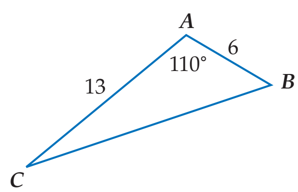
مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المثلَّثات الآتية، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرسان 5-8, 4-8)

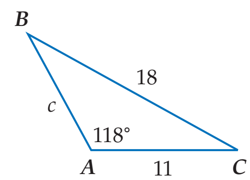
39)



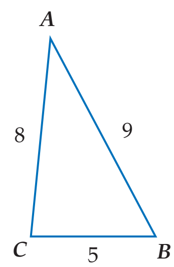
40)



41)



42)



حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرس 4-8)

43) $A = 72°, a = 6, b = 11$

44) $A = 46°, a = 10, b = 8$

45) $A = 110°, a = 9, b = 5$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

46) $\dfrac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

47) $\dfrac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

48) $\dfrac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

8-7 تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست الدوالّ الدورية. الدرس (6-8)

والآن:

- أصف دوالّ الجيب وجيب التمام والظل، وأمثّلها بيانيًّا.
- أصف دوالّ مثلَّثية أخرى، وأمثّلها بيانيًّا.

المفردات:

السعة
amplitude

التردد
frequency

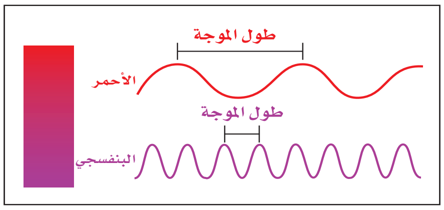
قراءة الرياضيات

رمز طول الموجة

يُستعمل الرمز λ للدلالة على طول الموجة، ويُقرأ لمبدا.

لماذا؟

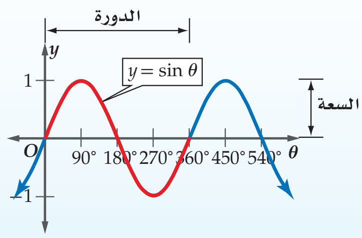
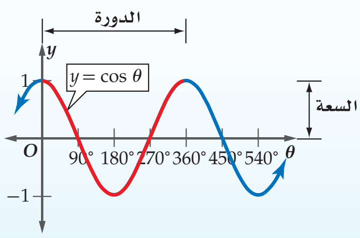
لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.



ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة: $y = A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$، حيث تمثِّل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

دوالُّ الجيب وجيب التمام والظلّ: يمكنك تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. تذكّر أن منحنيات الدوالّ الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكلِّ دورة يُسمّى طول الدورة. **سعة** منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مفهوم أساسي — **دالتا الجيب وجيب التمام** — أضف إلى مطويتك

الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوالّ الأخرى على التمثيل البياني للدوالّ المثلَّثية في صورتها العامة: $y = a\cos b\theta$, $y = a\sin b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

إرشادات للدراسة

طول الدورة

في الدالّتين: $y = a\sin b\theta$، $y = a\cos b\theta$، تُمثّل b عدد الدورات في 360°. ففي المثال 1 يدلُّ العدد 3 في الدالّة: $y = 4\cos 3\theta$ على وجود 3 دورات في 360°. مما يعني وجود دورة واحدة في 120°.

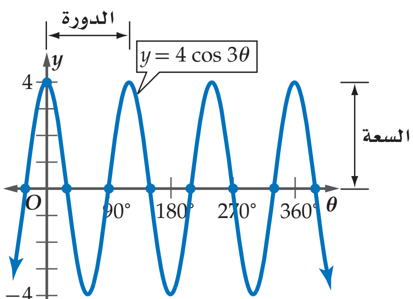
مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4\cos 3\theta$.

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة يساوي $\frac{4-(-4)}{2} = 4$ أو $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$

من الرسم يكرّر الرسم نفسه كلّ 120°



تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

1A) $y = \cos\frac{1}{2}\theta$

1B) $y = 3\sin 5\theta$

استعمل منحنيات الدوال المولّدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالّتين: $y = a \cos b\theta$, $y = a \sin b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام المناسبة بيانيًّا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ.

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \cos b\theta$	$y = a \sin b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

إرشادات للدراسة

نقاط التقاطع مع المحور θ

يمكن إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالّة مع المحور θ بوضع $y = 0$ وحلّ المعادلة أو إيجاد قيم θ التي تحقّقها.

مثال 2 تمثيل دالّتي الجيب وجيب التمام بيانيًّا

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

(a $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2 , b = 1$.

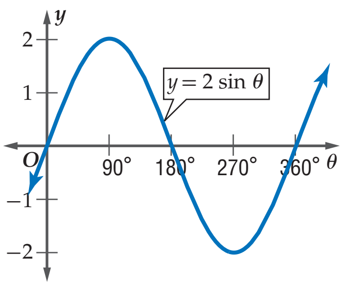
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًّا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2 .

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة طولها $360°$.

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$



إرشادات للدراسة

السعة

في التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$ ، تكون السعة هي $|a|$ ، والقيمة العظمى هي $y = |a|$، والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

(b $y = \cos 4\theta$

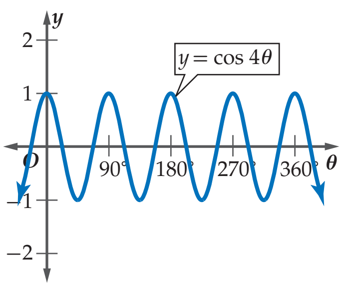
أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ، حيث: $a = 1 , b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$



تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

(2A $y = 3 \cos \theta$

(2B $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوالّ المثلّثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتمّ وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالّة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلًا إذا كان طول الدورة للدالّة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

مثال 3 من واقع الحياة

تمثيل موقف بدالّة دورية

أصوات: تُسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقلّ من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات/ ثانية.

الربط بالحياة

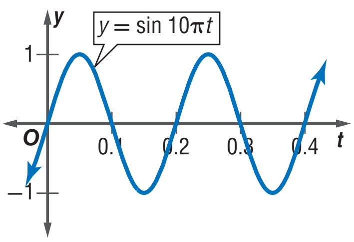
يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

a) أوجد طول دورة الدالّة التي تعبر عن موجات الصوت.

يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد، ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $0.2 = \frac{1}{5}$.

b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب تُمثّل موجة الصوت y باعتبارها دالّة في الزمن t، ثم مثِّلها بيانيًّا.

طول الدورة $= \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	اكتب العلاقة بين طول الدورة و b
$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert} = 0.2$	عوّض
$0.2\lvert b \rvert = 2\pi$	اضرب الطرفين في $\lvert b \rvert$
$b = 10\pi$	اضرب الطرفين في 5؛ b موجبة
$y = a \sin b\theta$	الصورة العامة لدالّة الجيب
$y = 1 \sin 10\pi t$	$a = 1,\ b = 10\pi,\ \theta = t$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط



تحقق من فهمك

3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

A) أوجد طول دورة الدالّة.

B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب التمام التي تعبِّر عن موجات الصوت، ثم مثِّلها بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة

لاحظ أن السعة تؤثّر في منحنى الدالّة في اتجاه المحور y، أما طول الدورة فيؤثّر في اتجاه المحور x.

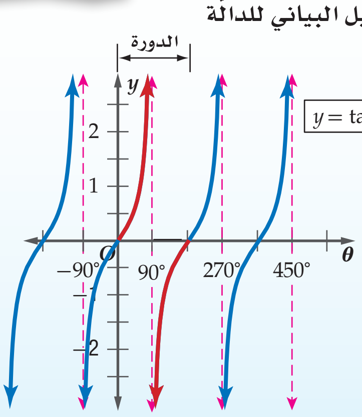
تُعَدّ دالّة الظِّل من الدوالّ المثلَّثية الفردية التي لها خطوط تقارب.

مفهوم أساسي

دالّة الظلّ

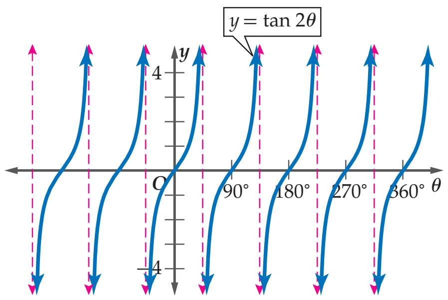
أضف إلى مطويتك

الدالّة المولِّدة (الأم)	$y = \tan \theta$	التمثيل البياني للدالّة
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180° n,\ n \in Z\}$	
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
السعة	غير معرَّفة	
طول الدورة	180°	



طول الدورة لمنحنى الدالّة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180°}{\lvert b \rvert}$، ولا يوجد سعة لهذه الدالّة. وخطوط التقارب الرأسية لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{180°}{\lvert b \rvert} \cdot \frac{1}{2}\right)$

مثال 4 تمثيل دوالّ الظلّ بيانيًا



أوجد طول دورة الدالّة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالّة بيانيًا.

طول الدورة: $\dfrac{180°}{|b|} = \dfrac{180°}{|2|} = 90°$

خط تقارب عند: $\dfrac{180°}{|2b|} = \dfrac{180°}{2|2|} = 45°$

ارسم خطوط التقارب عند

$-3 \cdot 45° = -135°,\ -1 \cdot 45° = -45°,\ 1 \cdot 45° = 45°,\ 3 \cdot 45° = 135°,\ \ldots$

استعمل $y = \tan \theta$، ولكن ارسم دورة كاملة كل $90°$.

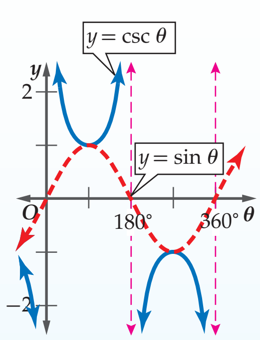
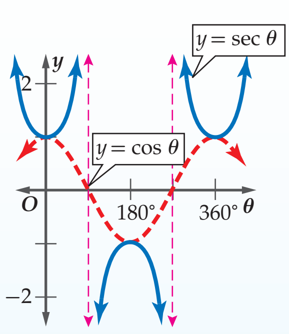
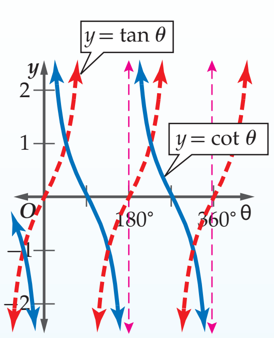
تحقق من فهمك

4) أوجد طول دورة الدالّة $y = \frac{1}{2}\tan \theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

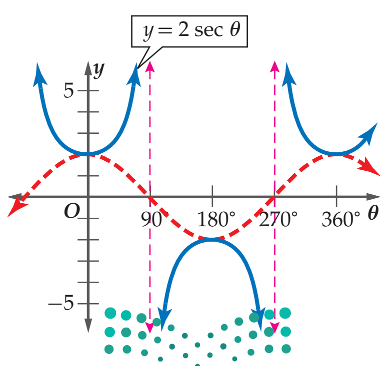
تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًا: ترتبط منحنيات دوالّ قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام بمنحنيات دوالّ الجيب، وجيب التمام، والظلّ.

مفهوم أساسي دوالّ قاطع التمام والقاطع وظلّ التمام

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
طول الدورة	360°	360°	180°

مثال 5 تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًا



أوجد طول دورة الدالّة $y = 2\sec \theta$. ثم مثِّل هذه الدالّة بيانيًا.

طول دورة الدالّة يساوي $360°$، وبما أن $y = \sec \theta$ هي مقلوب $y = \cos \theta$ فإنه لتمثيل $y = 2\sec \theta$ ، استفد من تمثيل $y = 2\cos \theta$ واتبع ما يلي:

– ارسم الدالّة $y = 2\cos \theta$.

– ارسم خطوط التقارب الرأسية عند نقاط تقاطع الدالّة $y = 2\cos \theta$ مع محور θ.

– مثّل الدالّة $y = 2\sec \theta$.

إرشادات للدراسة

دالّة الظلّ

لا يوجد سعة لدالّة الظلّ بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.

قراءة الرياضيات

الرمز $\vee$

يُقرأ: الرمز $\vee$ "أو" ويعني هنا اتحاد فترتين.

إرشادات للدراسة

دوالّ المقلوب

يمكنك استعمال منحنيات الدوالّ: $y = \sin \theta, y = \cos \theta,$ $y = \tan \theta$ لتمثيل منحنيات دوالّ المقلوب $\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$.

تحقق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالّة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالّة بيانيًّا.

تأكـد

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

المثالان 1, 2

1) $y = 4 \sin \theta$ **2)** $y = \sin 3\theta$

3) $y = \cos 2\theta$ **4)** $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5) **عناكب:** عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

a) أوجد طول دورة الدالّة.

b) افرض أن سعة الدالّة وحدة واحدة. واكتب دالّة جيب تُمثّل اهتزازات الشبكة y كدالّة في الزمن t، ومثلها بيانيًّا.

المثالان 4, 5 أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

6) $y = 3 \tan \theta$ **7)** $y = 2 \csc \theta$ **8)** $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

9) $y = 2 \cos \theta$ **10)** $y = 3 \sin \theta$ **11)** $y = \sin 2\theta$

12) $y = \cos 3\theta$ **13)** $y = \frac{3}{4} \cos \theta$ **14)** $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

15) $y = 3 \cos 2\theta$ **16)** $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$ **17)** $y = \sin \frac{\theta}{2}$

مثال 3

18) **أمواج:** قارب في عرض البحر يرتفع إلى أعلى وينخفض إلى أسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقلّ ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًّا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالّة جيب تُمثّل حركة القارب ومثّلها بيانيًّا. افترض أن h: الارتفاع بالبوصات، وt: الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقرٍّ عندما $t = 0$.

19) **كهرباء:** يتمثّل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: $-165, 165$ فولت، ويتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالّة دورية. اكتب دالّة جيب تمام تُمثّل فرق الجهد V كدالّة في الزمن t، ومثّلها بيانيًّا. افترض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

المثالان 4, 5 أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثِّلها بيانيًّا:

20) $y = \tan \frac{1}{2}\theta$　　21) $y = 3 \sec \theta$

22) $y = 2 \cot \theta$　　23) $y = \csc \frac{1}{2}\theta$

🌍 الربط بالحياة

الزلزال هو اهتزاز مفاجئ في القشرة الأرضية ينتج عن تكسُّر الصخور بسبب حركة الصفائح الأرضية، وينتج عن هذا الاهتزاز موجات زلزالية تنطلق من النقطة التي حدث عندها الكسر في باطن الأرض، وتنتشر في جميع الاتجاهات.

المصدر: كتاب العلوم للصف الثالث المتوسط، الفصل الدراسي الأول، طبعة 1436 هـ .

24) **زلازل:** محطة لرصد الزلازل رصدت موجة لزلزال ذات تردد 0.5 هيرتز، وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

a) اكتب دالّة جيب تمثِّل ارتفاع الموجة h كدالّة في الزمن t . افترض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجة.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

25) **اهتزازات:** سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالّة جيب التمام التي تمثِّل اهتزازات السلك y كدالّة في الزمن t، ومثِّلها بيانيًّا. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. وإذا تضاعف التردد، فماذا يحصل لكلٍّ من طول الدورة والسعة؟

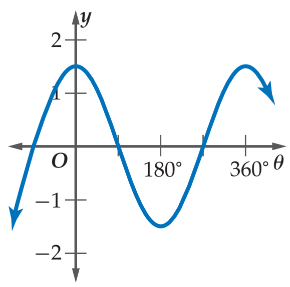
أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة لكلٍّ من الدوال الآتية، ثم مثّلها بيانيًّا:

26) $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$　　27) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$　　28) $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

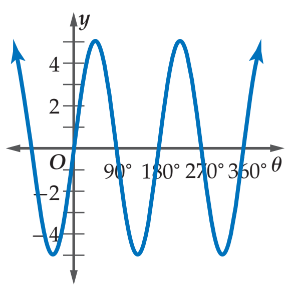
29) $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$　　30) $y = 5 \csc 3\theta$　　31) $y = 2 \cot 6\theta$

حدِّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

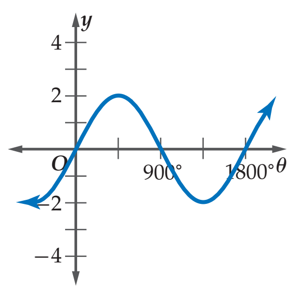
32)



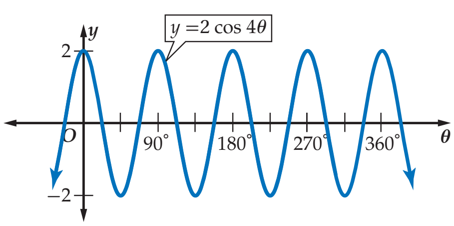
33)



34)



35)



مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** حدِّد المجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين $y = a\cos\theta$ ، $y = a\sec\theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

37) **تبرير:** عيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالّة $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ ، ومنحنى الدالّة $y = \sin\frac{1}{2}\theta$.

38) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مثلَّثية سعتها 3 ، وطول دورتها °180. ثم مثّلها بيانيًّا.

39) **اكتب:** وضِّح كيف تُحسب سعة الدالّة $y = -2\sin\theta$. ووضِّح كيف يؤثّر المعامل السالب في التمثيل البيانيّ للدالّة.

تدريب على اختبار

40) **مراجعة:** أيّ من الزوايا الآتية تحقِّق $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؟

A $990°$ B $1080°$ C $1830°$ D $1215°$

41) **إجابة قصيرة:** أوجد الحدّ رقم 100001 في المتتابعة:

$13, 20, 27, 34, 41, \ldots$

42) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟

A 25% B 34% C 66% D 75%

مراجعة تراكمية

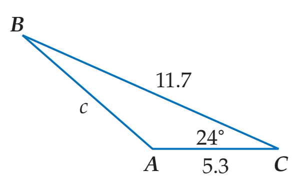
أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\cos 120° - \sin 30°$

44) $3(\sin 45°)(\sin 60°)$

45) $4\sin\frac{4\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}$

46) حُلَّ المثلّث المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزاويتين إلى أقرب درجة. (الدرس 5-8)



47) مثِّل الدالّة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

8-8

الدوالّ المثلَّثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًا. الدرس (8-7)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

المفردات:

القيم الأساسية
principal values

دالّة الجيب العكسية
Arcsine function

دالّة جيب التمام العكسية
Arccosine function

دالّة الظل العكسية
Arctangent function

المعادلة المثلّثية
Trigonometric equation

لماذا؟

لقد تعلّمت كيف تستعمل الدوالّ المثلَّثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادّة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in، ويصل ارتفاعه إلى 75 in . ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالّة الظلّ.

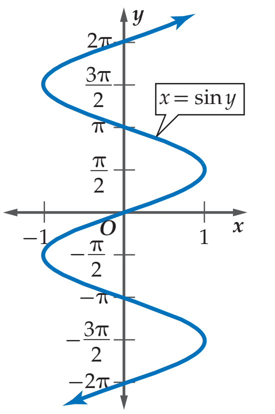
$$\tan\theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلّها 0.2 مستعملاً الآلة الحاسبة العلمية.

SHIFT tan 0.2 = 11.30993247

إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .

معكوس الدالّة المثلَّثيّة : إذا علمت قيمة الدالّة المثلَّثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالّة لإيجاد قياس الزاوية. تذكّر أن معكوس الدالّة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x , y. فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



لاحظ أن معكوس الدالّة ليس دالّة لوجود عدد من قيم y لكلِّ قيمة من قيم x.

لكن إذا تمَّ تحديد مجال الدالّة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$،

فإن المعكوس يكون دالّة عكسية.

تُسمّى القيم في هذا المجال المحدّد **القيم الأساسية**. فالدوالّ المثلّثية ذات المجال المحدّد تُمثّل بأحرف كبيرة، هكذا:

- $y = \text{Sin}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

يمكنك استعمال الدوالّ ذات المجالات المحددة لتعريف دوالّ عكسية: لكلٍّ من دالّة الجيب، ودالّة جيب التمام ودالّة الظلّ وهي **دالّة الجيب العكسية**، و**دالّة جيب التمام العكسية**، و**دالّة الظلّ العكسية** كما يأتي:

إرشادات للدراسة

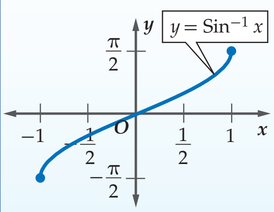
رموز الدوالّ العكسية
يُرمز للدوالّ العكسية أحيانًا ببعض الرموز الأخرى مثل:
دالّة الجيب العكسية $y = \text{Arcsin}\ x$
دالّة جيب التمام العكسية $y = \text{Arccos}\ x$
دالّة الظل العكسية $y = \text{Arctan}\ x$

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلَّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالّة الجيب العكسية	$y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$
دالّة الظل العكسية	$y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$

نموذج



في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60°, 300°$، كما أن كلَّ زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بضلع الانتهاء تُعدّ قيمة لـ y أيضًا. أما في الدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$، فإذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

مراجعة المفردات

الدوالّ العكسية
f, f^{-1} كلٌّ منهما دالّة عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

a) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

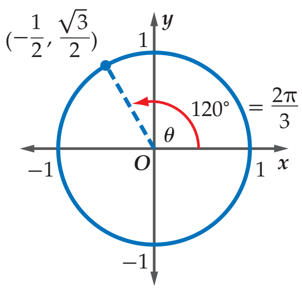
المطلوب إيجاد الزاوية θ ، حيث $0° \le \theta \le 180°$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1: استعمال دائرة الوحدة

أوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيّها x هو $-\frac{1}{2}$.

نلاحظ أن: $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ، عندما $\theta = 120°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$



الطريقة 2: استعمال الزاوية المرجعية

بما أن المطلوب $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، حيث $0° \le \theta \le 180°$

فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني.

أوجد الزاوية الحادّة (المرجعية) θ'

بما أن $\cos \theta' = \frac{1}{2}$، فإن $\theta' = 60° = \frac{\pi}{3}$

إذن $\theta = 180° - \theta'$ — θ زاوية تقع في الربع الثاني

$= 180° - 60°$

$= 120°$

الطريقة 3: استعمال الآلة الحاسبة

المفاتيح: SHIFT cos (−1÷2) = 120

إذن $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

b) $\text{Tan}^{-1} 1$

المطلوب إيجاد الزاوية θ في الفترة $-90° < \theta < 90°$ والتي ظلُّها يساوي 1.

المفاتيح: SHIFT tan 1 = 45

إذن $\text{Tan}^{-1} 1 = 45° = \frac{\pi}{4}$.

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية
تذكّر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالّة المثلّثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

1A) $\text{Cos}^{-1} 0$

1B) $\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند حساب قيمة معينة بوجود عدد من الدوالّ المثلَّثية، استعمل ترتيب العمليات الحسابية للحلِّ.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلَّثية

أوجد قيمة $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: tan SHIFT cos $(1 \div 2)$ = 1.732050808

إذن $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

تحقق: $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°, \tan 60° \approx 1.73$

إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

2A) $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$ **2B)** $\cos\left(\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

حَلُّ المعادلات المثلَّثية باستعمال الدوالّ العكسية: **المعادلة المثلَّثية** هي معادلة تحتوي على دوالّ مثلَّثية بزوايا مجهولة القياس. وحَلُّ المعادلة المثلَّثية يعني: إيجاد قياس الزوايا المجهولة، والتي دوالّها المثلَّثية تجعل المعادلة المثلَّثية صحيحة، وذلك بإعادة كتابتها باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\text{Sin}\ \theta = -0.35$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35. ويمكن كتابة هذا في الصورة: $\text{Sin}^{-1}(-0.35) = \theta$.

حُلَّ فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: SHIFT sin (-0.35) = -20.48731511

إذن $\theta \approx -20.5°$. الإجابة الصحيحة هي A.

تحقق من فهمك

3) إذا كان $\text{Tan}\ \theta = 1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $0.03°$ **C** $60.9°$

B $29.1°$ **D** لا يوجد حلّ

إرشادات للاختبار

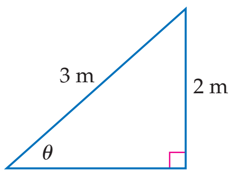
حذف البدائل

إشارة $\text{Sin}\ \theta$ تُحدّد قياس الزاوية في الربع الأول أو الربع الرابع، وبما أن -0.35 قيمة سالبة، فابحث عن زاوية في الربع الرابع.

يمكنك استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسيّة؛ لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في مثلَّث قائم الزاوية بمعرَّفة طولي ضلعين فيه.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية

لعبة التزحلق: لعبة تزحلق للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالّة الجيب.

$\text{Sin } \theta = \frac{2}{3}$ دالّة الجيب

$\theta = \text{Sin}^{-1} \frac{2}{3}$ دالّة معكوس الجيب

$\theta \approx 41.8°$ استعمل الآلة الحاسبة

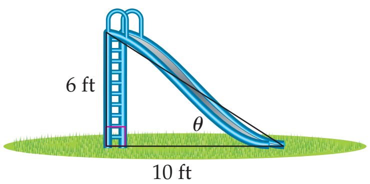
إذن قياس الزاوية يساوي $41.8°$ تقريبًا.

تحقّق: باستعمال الآلة الحاسبة، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{2}{3}$.

أيّ أن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

4) **تزلج:** يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



تأكد

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $\text{Sin}^{-1} \frac{1}{2}$

2) $\text{Tan}^{-1} (-\sqrt{3})$

3) $\text{Cos}^{-1} (-1)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

4) $\cos \left(\text{Sin}^{-1} \frac{4}{5}\right)$

5) $\tan (\text{Cos}^{-1} 1)$

6) $\sin \left(\text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

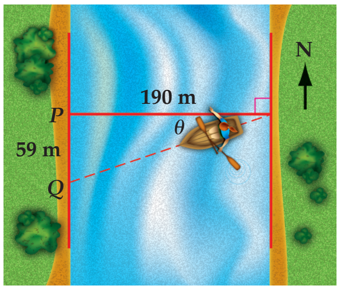
مثال 3 7) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\text{Sin } \theta = 0.422$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $25°$ **B** $42°$ **C** $48°$ **D** $65°$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

(8 $\text{Cos}\ \theta = 0.9$ **(9** $\text{Sin}\ \theta = -0.46$ **(10** $\text{Tan}\ \theta = 2.1$

مثال 4 **(11** **قوارب:** يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.



تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

(12 $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(13** $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(14 $\text{Sin}^{-1}(-1)$ **(15** $\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$

(16 $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(17** $\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

(18 $\tan\left[\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

(19 $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right)$ **(20** $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}\right)$

(21 $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{9}\right)$ **(22** $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

مثال 3 حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

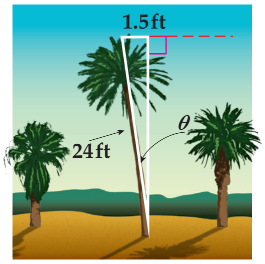
(23 $\text{Tan}\ \theta = 3.8$ **(24** $\text{Sin}\ \theta = 0.9$

(25 $\text{Sin}\ \theta = -2.5$ **(26** $\text{Cos}\ \theta = -0.25$

(27 $\text{Cos}\ \theta = 0.56$ **(28** $\text{Tan}\ \theta = -0.2$

مثال 4

29) **نخيل:** شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل المجاور، اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تميل بها الشجرة، ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



الربط بالحياة

فوائد شجرة نخلة التمر لا تُعدّ ولا تُحصى، منها قيمتها الغذائية العالية، وتُعدّ مصدرًا ممتازًا للطاقة الحرارية لجسم الإنسان، إذ تحوي ما يقارب 80% من السكريات، وتحتوي الثمار على الأملاح المعدنية والعناصر النادرة المفيدة لجسم الإنسان كالبوتاسيوم والماغنسيوم والحديد وفيتامينات أ، ب، ب$_2$، ب$_6$، ويستفيد الناس من أجزاء النخيل كلها.

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

30) $\csc \theta = 1$ 31) $\sec \theta = -1$ 32) $\sec \theta = 1$

33) $\csc \theta = \frac{1}{2}$ 34) $\cot \theta = 1$ 35) $\sec \theta = 2$

36) **تمثيلات متعدِّدة:** أجب عما يأتي، معتبرًا $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a) **بيانيًّا:** مثّل الدالّة بيانيًّا. وأوجد المجال والمدى.

b) **عدديًّا:** اختر قيمة للمتغيّر x بين $-1, 0$. ثم أوجد قيمة الدالّة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** قارن بين التمثيل البياني للدالّة $y = \cos x$، والتمثيل البياني للدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من خليل وعبدالرحمن بحلِّ المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$.
أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

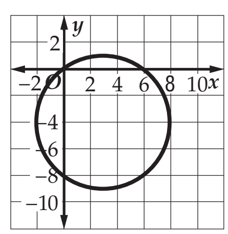
خليل	عبدالرحمن
$\cos \theta = 0.3$	$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 72.5^{\circ}$	$\cos^{-1} 0.3 = 162.5^{\circ}$

38) **تبرير:** وضِّح كيف يرتبط مجال الدالّة $y = \text{Sin}^{-1} x$ مع مدى الدالّة $y = \text{Sin}\, x$.

39) **اكتب:** فسّر لماذا تكون كلٌّ من $\text{Sin}^{-1} 8$, $\text{Cos}^{-1} 8$ غير معرَّفة، بينما $\text{Tan}^{-1} 8$ معرَّفة.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** أوجد معادلة الدائرة الممثَّلة في الشكل الآتي:



41) إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = 4 - 2x$ ، فأوجد $g[f(x)]$.

A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

مراجعة تراكمية

42) أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا. (الدرس 7-8)

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-8)

43) $\cos 3\pi$ 44) $\tan 120^{\circ}$ 45) $\sin 300^{\circ}$ 46) $\sec \frac{7\pi}{6}$

الفصل
8 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية (الدرس 1-8)

- $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}},\ \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}},\ \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
- $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}},\ \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}},\ \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

الزوايا وقياسها والدوالّ المثلَّثية للزوايا (الدرسان 2-8, 3-8)

- يُحدّد قياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي بمقدار الدوران واتجاهه من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام (الدرسان 4-8, 5-8)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

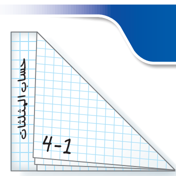
الدوالّ الدائرية والدوالّ المثلَّثية العكسية (الدرسان 6-8, 8-8)

- إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x, \sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin}\ x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\ x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\ x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًا (الدرس 7-8)

- للدوالّ المثلَّثية التي في إحدى الصورتين $y = a\sin b\theta,\ y = a\cos b\theta$، سعة تساوي $|a|$، وطول دورة يساوي $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{|b|}$.
- أما الدالّة المثلَّثية $y = a\tan b\theta$ فطول دورتها يساوي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$، ولا يوجد لها سعة.

المطويات منظم أفكار



تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كلِّ جملة فيما يأتي:

1) ــــــــــــ يُستعمل لحلِّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين وطول ضلع فيه.

2) الدوالّ $\cot\theta, \csc\theta, \sec\theta$ تسمى ــــــــــــ

3) تُسمى المسافة الأفقية في الدورة ــــــــــــ .

4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن هذه الزاوية تُسمى ــــــــــــ.

5) ــــــــــــ هي الزاوية المحصورة بين خطِّ النظر والخطِّ الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.

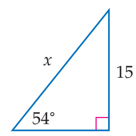
6) ــــــــــــ منحنى دالّة الجيب أو منحنى دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

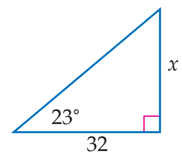
دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

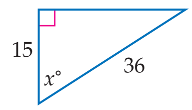
8-1 الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية ص 57-65

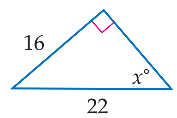
استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

7)


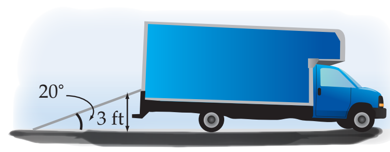
8)


أوجد قيمة x مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

9)


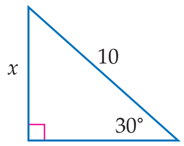
10)


11) **شاحنة:** ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض °20، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



مثال 1

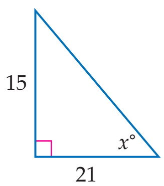
استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x.



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	دالّة الجيب
$\sin 30° = \frac{x}{10}$	عوِّض
$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\frac{10}{2} = x$	اضرب الطرفين في 10
$5 = x$	بسِّط

مثال 2

أوجد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan x° = \frac{15}{21}$	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
$\tan^{-1}\frac{15}{21} = x$	معكوس الظلّ
$35.5° \approx x°$	استعمل الآلة الحاسبة

8-2 الزوايا وقياساتها ص 66-71

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

12) $215°$ 13) $\frac{5\pi}{2}$

14) -3π 15) $-315°$

في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية من الزوايا المُعطاة:

16) $265°$ 17) $-65°$ 18) $\frac{7\pi}{2}$

19) **درّاجة هوائية:** إطار درّاجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in، فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان.

مثال 3

حوِّل القياس °160 إلى قياس بالرديان.

$$160° = 160° \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$$

$$\frac{160\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{9}$$

مثال 4

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية °150.

زاوية بقياس موجب:

$150° + 360° = 510°$ أضف °360

زاوية بقياس سالب:

$150° - 360° = -210°$ اطرح °360

8-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا ص 72-77

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

20) $\cos 135°$ 21) $\tan 150°$

22) $\sin 2\pi$ 23) $\cos \frac{3\pi}{2}$

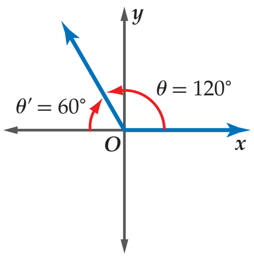
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ .

24) $(-4, 3)$ 25) $(5, 12)$ 26) $(16, -12)$

27) **كرة:** قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها $70°$، وبسرعة ابتدائية مقدارها 5m. المعادلة التي تُمثِّل المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0(\cos \theta)\, t$، حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، وθ هي قياس الزاوية التي قذفت فيها الكرة، وt هو الزمن (بالثواني). ما المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور 10 ثوانٍ.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120°$.



بما أن ضلع الانتهاء للزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية المرجعية θ هو $180° - 120° = 60°$.

دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن:

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(6, 5)$. فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

$$r = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{6} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{5}$$

8-4 قانون الجيوب ص 78-84

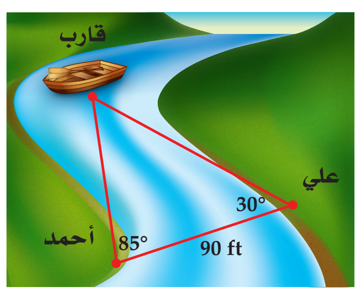
حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممَّا يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

28) $C = 118°, c = 10, a = 4$

29) $A = 25°, a = 15, c = 18$

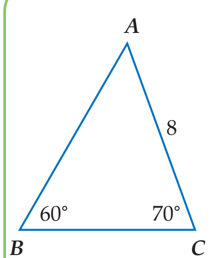
30) $A = 70°, a = 5, c = 16$

31) **قوارب:** يقف علي وأحمد على جانبَي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



مثال 7

حُلَّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



أولًا أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + A = 180°,\ A = 50°$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد قيمتَي a, c.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c} \qquad \frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$$

$$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°} \approx 8.7 \qquad a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°} \approx 7.1$$

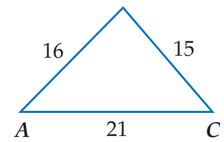
إذن $A = 50°, c \approx 8.7, a \approx 7.1$.

دليل الدراسة والمراجعة

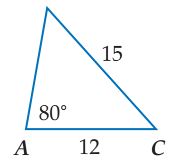
8-5 قانون جيوب التمام ص 87-92

حدِّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيوب التمام) في حلِّ كلٍّ من المثلَّثات الآتية، ثم حُلّ كلَّ مثلَّث منها مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

32)



33)



34) $C = 75°, a = 5, b = 7$

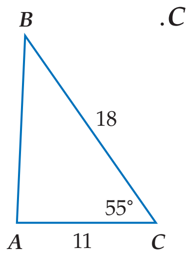
35) $A = 42°, a = 9, b = 13$

36) $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

37) **زراعة:** يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلَّثة الشكل. طولا ضلعيها 120 ft, 325 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما °70. فما طول السياج الذي يحتاج إليه؟

مثال 8

حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55°, b = 11, a = 18$.



أُعطي في السؤال طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلَّث واستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11)\cos 55°$$
$$c^2 \approx 217.9$$
$$c \approx 14.8$$

ثم استعمل قانون جيوب التمام مرّة أخرى لإيجاد قياس الزاوية B.

$$11^2 = 18^2 + (14.8)^2 - 2(18)(14.8)\cos B$$
$$\frac{11^2 - 18^2 - (14.8)^2}{-2(18)(14.8)} = \cos B$$
$$0.7921 \approx \cos B$$
$$38° \approx B$$

قياس الزاوية الثالثة A

$$m\angle A \approx 180° - (55° + 38°) \approx 87°$$

إذن $A \approx 87°, B \approx 38°, c \approx 14.8$

8-6 الدوالّ الدائرية ص 93-99

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

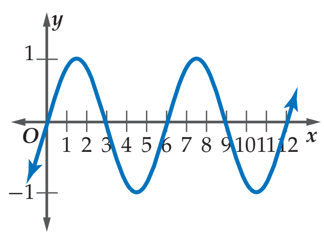
38) $\cos(-210°)$

39) $(\cos 45°)(\cos 210°)$

40) $\sin -\frac{7\pi}{4}$

41) $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

42) أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



43) **إطارات:** طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالّة التي تُمثّل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالّة في الزمن؟

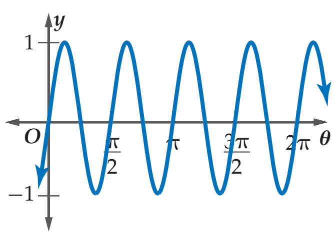
مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



يبدأ النمط بالتكرار عند $\frac{\pi}{2}, \pi$، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$.

8-7 تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًا ص 100-106

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة للدوالّ الآتية، ثم مثّل كلًّا منها بيانيًّا:

44) $y = 4 \sin 2\theta$

45) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

46) $y = 3 \csc \theta$

47) $y = 3 \sec \theta$

48) $y = \tan 2\theta$

49) $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

50) **رياضة:** قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره 10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالّة جيب تُمثّل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالّة في الزمن t.

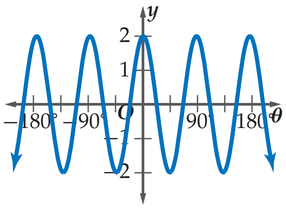
مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

السعة: $|a| = |2| = 2$. لذلك فالتمثيل البياني للدالّة تكون له قيمة عظمى هي 2، وقيمة صغرى هي -2.

وطول الدورة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$$



8-8 الدوالّ المثلَّثية العكسية ص 107-112

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

51) $\text{Sin}^{-1}(1)$

52) $\text{Tan}^{-1}(0)$

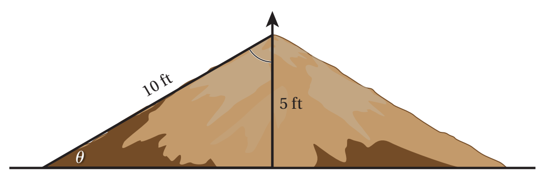
53) $\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

54) $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

55) $\text{Tan}^{-1} 1$

56) $\text{Cos}^{-1} 0$

57) **منحدرات:** منحدر ارتفاعه 5 أقدام، وطوله 10 أقدام كما يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالّة مثلّثية عكسية، يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياس هذه الزاوية.



أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

58) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

59) $\sin\left(\text{Tan}^{-1} 0\right)$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك .

60) $\text{Tan}\,\theta = -1.43$

61) $\text{Sin}\,\theta = 0.8$

62) $\text{Cos}\,\theta = 0.41$

مثال 12

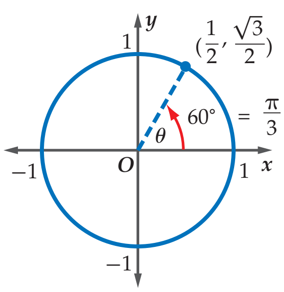
أوجد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$، بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$.

استعمل دائرة الوحدة.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة، بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما أن: $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}$.



مثال 13

أوجد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

SHIFT sin TAN 1 ÷ 2 = 0.4472135955

إذن $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\,\theta = 0.72$، فأوجد θ.

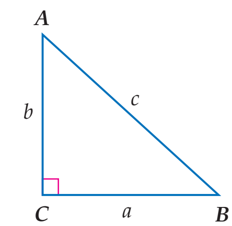
استعمل الآلة الحاسبة.

SHIFT COS 0.72 = 43.9455195623

إذن $\theta \approx 43.9°$.

اختبار الفصل

حُلّ $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي باستعمال القياسات الواردة، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



1) $A = 36°, c = 9$

2) $a = 12, A = 58°$

3) $a = 9, c = 12$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

4) $325°$

5) $-175°$

6) $\frac{9\pi}{4}$

7) $-\frac{5\pi}{6}$

8) حدّد ما إذا كان للمثلَّث ABC الذي فيه $A = 110°, a = 16, b = 21$ حل واحد أم حلان أم ليس له حل. ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممَّا يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

9) $\cos(-90°)$

10) $\sin 585°$

11) $\cot \frac{4\pi}{3}$

12) $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

13) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

14) $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$

15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلًّا من: $\cos\theta, \sin\theta$.

16) **اختيار من متعدد:** أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظلّ لها سالبين؟

A $65°$

B $310°$

C $120°$

D $265°$

أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين. ثم مثِّل الدالّتين بيانيًّا:

17) $y = 2\sin 3\theta$

18) $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

19) **اختيار من متعدد:** طول دورة الدالّة $y = 3\cot\theta$ يساوي:

A $120°$

B $180°$

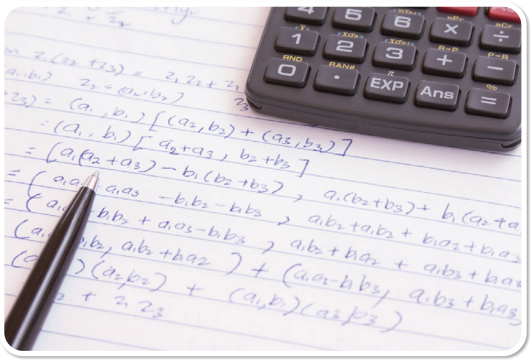
C $360°$

D $1080°$

20) حدّد أنسب طريقة نبدأ بها لحلّ $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام)، الذي فيه: $y = 15, z = 9, X = 105°$، ثم حُلّ المثلَّث مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

21) **سواقٍ:** عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثّل الارتفاع عند الزمن 0. اكتب دالّة مثلَّثية تُمثِّل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالّة في الزمن t. ثم مثِّل الدالّة بيانيًّا.

استعمال الآلة الحاسبة العلمية



تُعدّ الآلات الحاسبة العلمية والآلات الحاسبة البيانية من الأدوات المهمة والفاعلة في حلِّ المسائل. كما لاحظت سابقًا فإن بعض أسئلة الاختبارات تتضمن خطوات أو حسابات تحتاج فيها إلى استعمال الآلة الحاسبة العلمية.

استراتيجية استعمال الآلة الحاسبة العلمية

الخطوة 1

تَعرّف الدوالّ المختلفة في الآلة الحاسبة العلمية جيدًا ، ومتى تَستعمل كلًّا منها.

- **الصيغة العلمية :** للحسابات المتعلّقة بالأعداد الكبيرة.
- **الدوالّ الأُسّية :** مسائل النموِّ والاضمحلال والربح المركب.
- **الدوالّ المثلّثية :** مسائل تتضمن زوايا، ومسائل ترتبط بحلِّ المثلّث، ومسائل في القياس غير المباشر.
- **الجذور التربيعية والنونية :** مسائل ترتبط بالبُعد في المستوى الإحداثي، ومسائل ترتبط بنظرية فيثاغورس.

الخطوة 2

استعمل الآلة الحاسبة العلمية لحلِّ المسائل.

- تذكّر أن تعمل بالصورة الأكثر فاعلية، فبعض الخطوات يمكن القيام بها ذهنيًّا أو يدويًّا، وفي بعضها الآخر يلزم استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- تحقّق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المُعطيات لحلِّها:

عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة، شكّل زاوية قياسها °57 مع قمة الشجرة. ما ارتفاع الشجرة مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

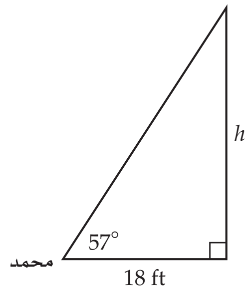
A 27.7 ft

B 28.5 ft

C 29.2 ft

D 30.1 ft

اقرأ المسألة بعناية. أُعطيت بعض القياسات، وطلب إليك إيجاد ارتفاع الشجرة. إذن من المفيد في البداية أن ترسم مخطّطًا يُمثّل المسألة.



استعمل دالّة مثلَّثية لكتابة علاقة تربط الطولين بقياس الزاوية في المثلَّث القائم الزاوية.

$\tan \theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالّة الظل

$\tan 57° = \dfrac{h}{18}$ عوّض

لإيجاد ارتفاع الشجرة h تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$. استعمل الآلة الحاسبة العلمية.

$1.53986 \approx \dfrac{h}{18}$ استعمل الآلة الحاسبة

$27.71748 \approx h$ اضرب الطرفين في 18

يبلغ ارتفاع الشجرة 27.7 ft تقريبًا؛ إذن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ كلَّ مسألة وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل مُعطيات المسألة لحلها:

1) تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسيًّا. ما زاوية ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟

A 15.6°　　**B** 18.4°

C 19.6°　　**D** 22.3°

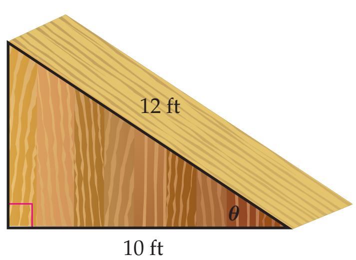
2) ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثّله الشكل أدناه؟

F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

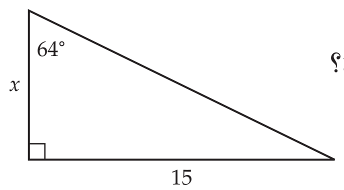


اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) ما قيمة x في الشكل المجاور، مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالّة: $y = 3\cos 4\theta$؟

A $90°$

B $180°$

C $270°$

D $360°$

3) تتكون مجموعة حلِّ المعادلة $\sqrt{8x+1} - 4 = 1 - 2x$ من:

A عددين صحيحين موجبين.

B عدد صحيح موجب واحد فقط.

C عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب.

D ليس لها حلول حقيقية.

4) ما القيمة الدقيقة لـِ $\sin 240°$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) المقدار $i^{53} + i^{51} + i^{50}$ يساوي:

A i

B $-i$

C -1

D 0

6) ما قيمة m في المثلَّث MNO الذي فيه: $n = 12.4\text{ cm}, M = 35°, N = 74°$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

7) أوجد قيمة المحددة: $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

A -144

B -72

C 72

D 144

8) إذا كان $(x+1)$ عاملًا لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$، فإن قيمة K تساوي:

A 6

B $\frac{1}{3}$

C -3

D 3

9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

A -11

B 1

C -1

D 11

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

10) تعتمد سرعة موجة المدِّ (تسونامي) v على معدّل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تُمثّل سرعة المد عندما يكون معدّل عمق الماء d كيلومترًا، $v = 356\sqrt{d}$، وإذا علمت أن موجة المدّ (تسونامي) تسير بسرعة $145\,\mathrm{km/h}$، فما معدَّل عمق الماء، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة؟

11) أوجد معكوس $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$.

12) إذا كان $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$، فأوجد قيمة $(f \circ g)\left(\frac{11}{2}\right)$.

13) إذا كان $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$، حيث

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

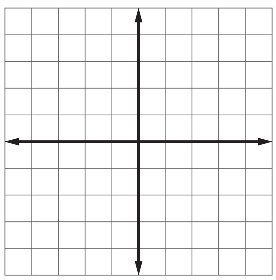
فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من $\underline{C}$) .

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي موضِّحًا خطوات الحلِّ:

14) إذا كان $f(x) = -|x+4| + 3$، فأجب عمَّا يأتي

a) مثّل الدالّة $f(x)$ بيانيًّا .



b) حدِّد مجال الدالّة ومداها.

c) أوجد المقاطع للمحاور x، y .

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	8-1	8-7	مهارة سابقة	8-3	مهارة سابقة	8-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

الميل: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$

نقطة المنتصف: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

المصفوفات

الضرب: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$

الجمع: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$

محددة الرتبة الثانية: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

الطرح: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$

مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

الضرب بثابت: $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار): $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0$

الفرق بين مكعبين: $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

مربع المجموع: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

مكعب المجموع: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

مربع الفرق: $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

مكعب الفرق: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما: $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$n! = n\,(n - 1) \,.\, (n - 2) \ldots 2 \,.\, 1$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\ P(A) \neq 0$$

$$0! = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$

الحد النوني في المتتابعة الحسابية: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

مجموع حدود المتتابعة الهندسية: $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r},\ r \neq 1$

مجموع حدود المتتابعة الحسابية: $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

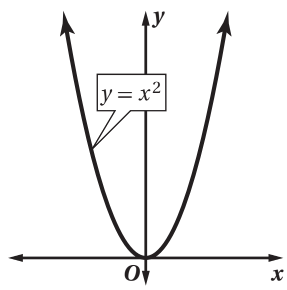
الصيغ

حساب المثلثات

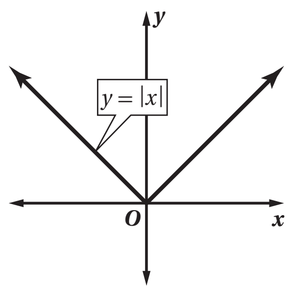
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$
قانون جيب التمام	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
الدوال المثلثية	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$ $\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

الدوال الرئيسة (الأم)

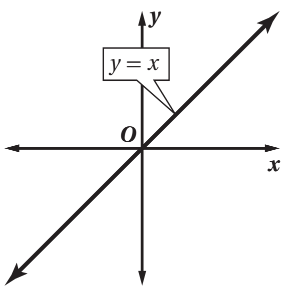
الدوال التربيعية



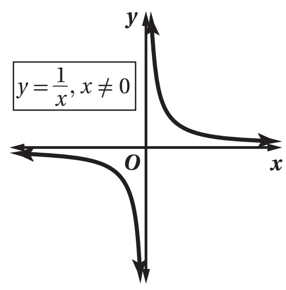
دوال القيمة المطلقة



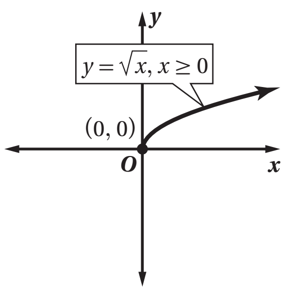
الدوال الخطية



دوال المقلوب



دوال الجذر التربيعي



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$	$\underline{A}^{-1}$
النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$	$-\underline{A}$
مصفوفة الوحدة	$\underline{I}$
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\bar{x}$
الانحراف المعياري	s
الحادثة المتممة	A'
احتمال الحادثة A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B\|A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\cot(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\csc(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec(x)$
معكوس دالة الجيب	$\sin^{-1} x$
معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1} x$
معكوس دالة الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \|x\|$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	$\boldsymbol{i}$
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\underline{A}_{m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة $\underline{A}$	$\|\underline{A}\|$